Faisceau gaussien

1 Introduction

La forme du faisceau lumineux émis par un laser est particulière, et correspond à un faisceau gaussien, ainsi nommé car l'intensité décroît suivant une loi gaussienne lorsqu'on s'écarte du centre du faisceau.
Une étude spécifique doit lui être consacrée pour deux raisons. Premièrement, il possède des caractéristiques qu'il faut connaître pour déterminer les propriétés du faisceau sortant d'un laser. Deuxièmement, il ne vérifie pas les lois de l'optique géométrique car il ne peut pas être décrit entièrement en terme de rayons lumineux. Nous verrons donc dans quels cas importants les lois de l'optique géométrique s'appliquent approximativement, et dans quels cas il faut employer d'autres méthodes.

2 Structure du faisceau gaussien (mode TEM_{00})

On considère une onde se propageant le long de l'axe Oz. Le plan (xy) est perpendiculaire à la direction de propagation. L'onde issue de la cavité laser est une onde sphérique gaussienne. Cela signifie que les surfaces d'ondes sont sphériques, et que l'intensité décroît comme $e^{-2(x^2+y^2)/w^2}$ lorsqu'on s'éloigne de l'axe Oz. w est une largeur caractéristique du faisceau, dont on verra qu'elle dépend de la position sur l'axe Oz.

2.1 Onde sphérique

On considère tout d'abord une onde sphérique de centre O, dans le plan (xy) de cote $z = R$. R est alors le rayon de courbure de la surface d'onde. L'amplitude de l'onde sphérique en un point $M(x, y, R)$ est $A = a_0 e^{-ik \cdot OM}$ avec $OM = \sqrt{R^2 + x^2 + y^2} \simeq R + (x^2 + y^2)/(2R)$ pour $x, y \ll R$. L'amplitude de l'onde sphérique s'écrit donc :

$$A = a_0 e^{-ikR} e^{-i\frac{k}{2R}(x^2+y^2)}$$

La première exponentielle est un déphasage indépendant de x et y, et la deuxième est caractéristique des ondes sphériques. On note que le signe de R dépend du caractère convergent ou divergent de l'onde sphérique : $R > 0$ pour une onde divergente, et $R < 0$ pour une onde convergente.

2.2 Onde sphérique gaussienne

L'amplitude complexe de l'onde est de la forme :

$$A = a_0 e^{-(x^2+y^2)/w^2} e^{-ik(x^2+y^2)/(2R)}$$

La première exponentielle donne l'amplitude gaussienne, et la deuxième la forme d'onde sphérique. On remarque qu'on peut écrire cette onde sous la forme $a_0 e^{-\alpha(x^2+y^2)}$ avec α complexe.
En utilisant cette dernière écriture, on peut calculer les valeurs de w et R pour toute position z en utilisant soit la résolution des équations de Maxwell, soit le principe d'Huygens-Fresnel à l'approximation de Fresnel (voir cours sur la diffraction). On s'aperçoit alors que si l'onde est spérique gaussienne en un point de Oz, elle l'est sur tout l'axe et que R et w dépendent de z.

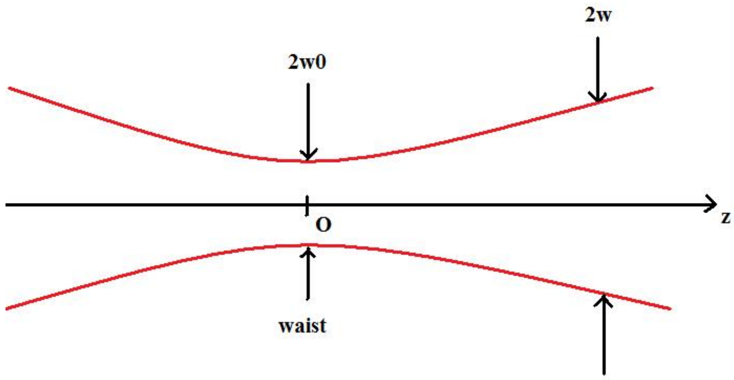

Figure 1: Le faisceau a une symétrie de révolution autour de l'axe Oz. Le diamètre du faisceau en un point d'abscisse z est $2w$, c'est à dire que w représente le rayon. w varie en fonction de z, et on appelle waist w_0 sa valeur minimale. Par convention, la position du waist est en $z = 0$. La courbe hyperbolique tracée en rouge est l'enveloppe du faisceau : ce n'est pas un rayon lumineux.

2.3 Description du faisceau gaussien (mode TEM$_{00}$)

L'allure du faisceau est représentée sur la figure 1. Il a une symétrie de révolution autour de l'axe Oz. w est le *rayon* du faisceau en un point de Oz. Il passe par un minimum w_0 appelé waist en $z = 0$.
Près du waist, l'onde gaussienne se comporte comme une onde plane et la faisceau est presque parallèle. Loin du waist, elle se comporte comme une onde sphérique centrée en O. Le fait d'être "près du waist" signifie que z est petit par rapport à une longueur caractéristique du faisceau appelée "distance de Rayleigh" et notée z_R. Loin du waist signifie $z \gg z_R$.

2.3.1 Intensité du faisceau

L'intensité à la distance $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ d'un point d'abscisse z est :

$$I(r,z) = I(0,0)\left(\frac{w_0}{w}\right)^2 e^{-2r^2/w^2} = I(0,z)e^{-2r^2/w^2}$$

Pour $r = w$, l'intensité vaut $1/e^2 = 13,5\%$ de son intensité au centre. Presque toute l'énergie du faisceau est contenue dans un rayon w ou un diamètre $2w$.
On constate aussi que l'intensité au centre en z est inversement proportionnelle à la surface du faisceau en ce point (conservation de l'énergie).

2.3.2 Dimension du faisceau

On admettra que

$$w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \text{ avec } z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

où λ est la longueur d'onde et z_R est appelée distance de Rayleigh.
Cela peut se réécrire $(w(z)/w_0)^2 - (z/z_R)^2 = 1$, qui est l'équation d'une hyperbole.
Pour $z = z_R$, on a $w = \sqrt{2}w_0$. Si $z \ll z_R$, on a $w \simeq w_0 =$ constante : le faisceau est parallèle. Si $z \gg z_R$, $w \simeq w_0 z/z_R$. Le rayon du faisceau croît linéairement : loin du waist, on a un faisceau divergent conique. On peut définir l'angle total de divergence θ par $w(z) \simeq \theta z/2$, c'est à dire :

$$\frac{\theta}{2} = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

Cette équation définit la *demi-divergence* qui est souvent mentionnée dans les livres. Les fabriquants de lasers indiquent toujours la divergence totale $\theta = 2\lambda/(\pi w_0)$ du faisceau. Il

faut faire attention si c'est la demi-divergence ou la divergence totale qui est mentionnée dans un énoncé.
En TP : mesure de θ et déduction de w_0 et z_R. On remarque que plus le waist est large, et plus la divergence est petite : en élargissant le faisceau, on réduit sa divergence et on augmente sa distance de Rayleigh.

2.3.3 Surfaces d'onde

Les surfaces d'ondes sont sphériques, de rayon

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$$

On voit que $R(z)$ ne varie pas linéairement avec z, donc la position du centre de courbure varie avec z.
Au waist, pour $z = 0$, le rayon de courbure est infini : l'onde y est plane. De manière générale, on peut assimiler le faisceau laser à une onde plane tant que $z \ll z_R$. Le rayon de courbure décroît lorsqu'on s'approche de $z = z_R$.
Le rayon de courbure est minimal pour $z = z_R$ où il vaut $2z_R$.
Lorsque z continue d'augmenter au-delà de z_R, le rayon de courbure réaugmente. Pour $z \gg z_R$, on a $R(z) \simeq z$: loin de la distance de Rayleigh, l'onde est sphérique de centre O.
Les caractéristqiues d'un faisceau gaussien : divergence, distance de Rayleigh, diamètre en un point, et rayon de courbure des surfaces d'onde dépendent uniquement du waist et de la longueur d'onde. Ces deux grandeurs suffisent donc à caractériser un faisceau gaussien. Mais si on connaît la longueur d'onde et la divergence ou la distance de Rayleigh, on peut en déduire le waist.

3 Faisceau gaussien et cavité laser

Nous avons vu dans le chapitre précédent que c'est la forme de la cavité d'un laser qui détermine la forme du faisceau qu'elle émet. En particulier, c'est parcequ'elle est constituée de miroirs sphériques (un peut éventuellement être plan) que le faisceau est gaussien. La cavité est caractérisée par sa longueur ℓ et par les rayons de courbure R_1 et R_2 de ses miroirs. La position et la largeur du waist dépendent de ces trois paramètres. On les détermine en utilisant le fait que les miroirs sont des surfaces d'ondes.

3.1 Détermination de la position et de la largeur du waist

La figure 2 donne les notations. On va déterminer les distances algébriques z_1 du waist au miroir de gauche, et z_2 du waist au miroir de droite, l'origine des abscisses étant prise au waist. On aura ainsi déterminé la position du waist. Dans un second temps, on en déduit la distance de Rayleigh, à partir de laquelle on calcule la largeur w_0 du waist.
A gauche du waist, le faisceau gaussien est convergent, donc le rayon de courbure des surfaces d'onde y est négatif. On a alors à la surface du miroir de gauche : $R(z_1) = z_1 + z_R^2/z_1 = -R_1$.
De même à la surface du miroir de droite (surfaces d'onde de rayon positif) : $R(z_2) = z_2 + z_R^2/z_2 = R_2$.
Enfin, on a $z_2 - z_1 = \ell$.
Cela fait trois équations à trois inconnues (z_1, z_2 et z_R). La solution est :

$$z_1 = \frac{\ell(\ell - R_2)}{R_1 + R_2 - 2\ell} \quad z_2 = \frac{\ell(R_1 - \ell)}{R_1 + R_2 - 2\ell} \quad z_R^2 = \frac{\ell(R_1 - \ell)(R_2 - \ell)(R_1 + R_2 - \ell)}{(R_1 + R_2 - 2\ell)^2}$$

La condition $z_R^2 > 0$ redonne la condition de stabilité de la cavité.
On déduit la largeur du waist de $w_0^2 = \lambda z_R/\pi$

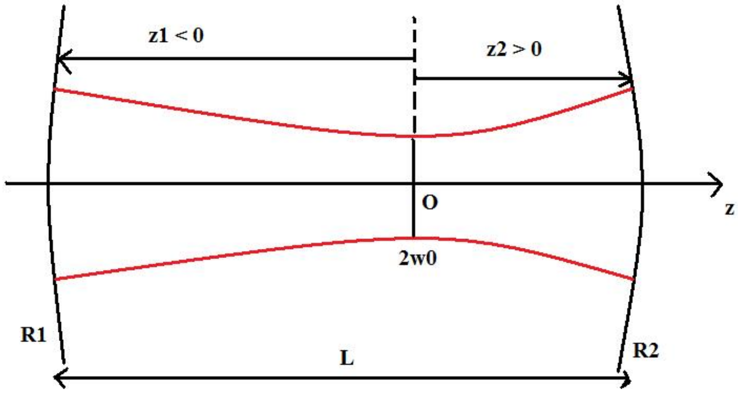

Figure 2: La cavité de longueur ℓ est composée de deux miroirs de rayons de courbure R_1 et R_2. On veut déterminer la distance algébrique z_1 entre le waist et le miroir de gauche. L'origine est choisie au waist. On aura ainsi déterminé la position du waist dans la cavité. On pourra en déduire la distance de Rayleigh, puis la largeur du waist du faisceau.

Une méthode graphique permet dans certains cas de trouver la position du waist dans la cavité : on trace les cercles de rayon $R_1/2$ tangent au miroir de gauche et de rayon $R_2/2$ tangent au miroir de droite.

- Si les deux cercles sont trop petits pour se couper, la cavité est instable et le faisceau gaussien n'existe pas.
- Si les deux cercles sont tangents, la cavité est en limite de stabilité et le waist se trouve au point de tangence.
- Si les deux cercles se coupent, la cavité est stable et le waist est dans le plan de leurs intersections.
- Si les cercles sont inclus l'un dans l'autre, la cavité est instable.

3.2 Modes transverses de la cavité

A l'intérieur d'une cavité, il peut exister plusieurs types de faisceaux gaussiens, dits modes transverses électromagnétiques TEM_{mn}, où m et n sont le nombre de fois où l'intensité s'annule suivant x et y. En général, c'est le mode TEM_{00} qui ne s'annule jamais qui est le plus stable et pour lequel les cavités sont réglées. Cependant, on peut obtenir les autres modes en tournant légèrement les miroirs. Leur intensité est donnée par une gaussienne multipliée par un polynôme s'annulant m fois suivant x et un polynome s'annulant n fois suivant y. Les polynômes sont des polynômes de Hermite. L'allure des différents modes TEM est donnée sur la figure 3.

4 Image d'un faisceau gaussien par une lentille

Un faisceau gaussien est entièrement déterminé par sa longueur d'onde et son waist. Le problème qui se pose est le suivant : étant donné un faisceau gaussien incident dont le waist w_0 est situé à la distance z d'une lentille mince de focale f', quelles sont la position z' et la valeur w'_0 du waist du faisceau image ? On comptera les distances algébriquement à partir du centre de la lentille comme en optique géométrique.
Il s'avère que le waist image n'est pas l'image géométrique du waist objet. En ce sens, le faisceau gaussien ne suit pas les lois de l'optique géométrique.
On résoud le problème de la manière suivante :

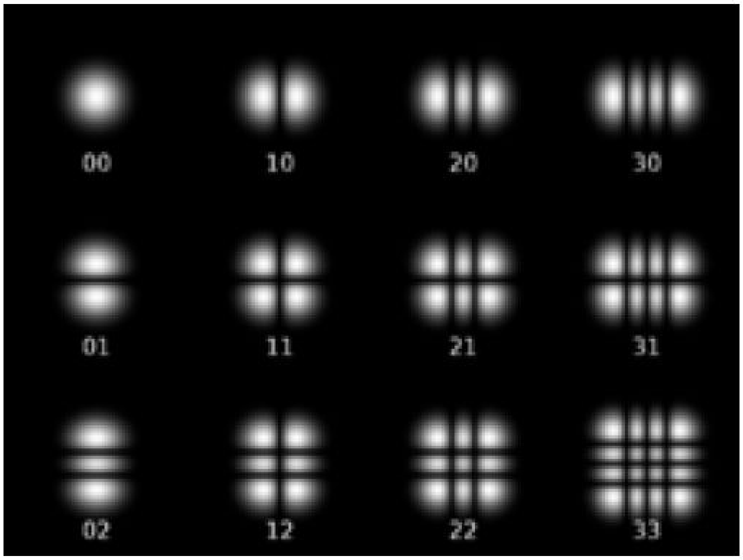

Figure 3: Allures des premiers modes TEM_{mn}.

- Une onde sphérique gaussienne divergente est transformée par la lentille en une onde gaussienne convergente. Leurs centres de courbures sont images l'un de l'autre par la lentille. Les rayons de courbure des deux ondes gaussiennes au niveau de la lentille vérifient donc la relation de Descartes pour les lentilles minces. Cela fournit une première équation reliant w_0, z, z' et w'_0.
- Les diamètres $2w$ et $2w'$ des deux faisceaux sont égaux sur la lentille. Cela fournit une deuxième équation.
- On a donc deux équations à deux inconnues. Leur résolution est un peu technique. On trouve finalement :
$$z' = f' \frac{z(f'+z)+z_R^2}{(f'+z)^2+z_R^2} \tag{1}$$
avec z_R la distance de Rayleigh du faisceau objet, et
$$\frac{w'_0}{w_0} = \frac{f'}{\sqrt{(f'+z)^2+z_R^2}} \tag{2}$$

Nous allons voir quelques particuliers importants.

4.1 Si $z, f' \ll z_R$

C'est le cas d'une lentille de courte focale éclairée par un faisceau dont le waist est proche de la lentille.
On trouve $z' = f'$, c'est à dire que le waist image est au foyer, et $w'_0/w_0 = f'/z_R \ll 1$ donc le waist image est très petit.
On a focalisé le faisceau incident au foyer de la lentille, ce qui se comprend car dans cette situation le faisceau incident est parallèle et formé d'une onde plane.

4.2 Waist objet au foyer objet

Si on place le waist du faisceau incident au foyer objet de la lentille, on a $z = -f'$. Alors $z' = f'$ et le waist image se trouve à nouveau au foyer image de la lentille. Le grandissement est $w'_0/w_0 = f'/z_R = \lambda f'/(\pi w_0^2)$. Si $f' \gg z_R$, ce grandissement est grand. Dans ce cas, le waist image est large et le faisceau image diverge peu. Le faisceau sortant est quasiment

parallèle dans ce cas.
On voit aussi que $w_0' = \lambda f'/(\pi w_0)$: plus le waist objet est petit (petit point lumineux au foyer objet) et plus le waist image est large (faisceau sortant très parallèle).

4.3 Si $z \gg z_R$

Dans cette limite, l'onde incidente sur la lentille est une onde sphérique divergente centrée sur le waist objet, qui vérifie alors les lois de l'optique géométrique. Dans ce cas limite, la position et le grandissement du waist image sont donnés par l'optique géométrique.

5 Image d'un faisceau gaussien par un système afocal

Un système afocal est constitué de deux lentilles L_1 et L_2 de distances focales f_1' et f_2', avec le foyer image de la première au foyer objet de la deuxième. La distance entre les deux lentilles est donc $f_1' + f_2'$. On peut utiliser soit deux lentilles convergentes, soit une lentille divergente de courte focale et une convergente de plus grande focale (c'est moin encombrant).
En optique géométrique, l'image d'un faisceau parallèle par un afocal est un faisceau parallèle au faisceau incident, élargi d'un facteur f_2'/f_1'.
La question est de savoir si on peut élargir ou rétrécir un faisceau gaussien avec un tel système, et si oui, avec quel grandissement.
Il y a deux manières de procéder. Nous commençons par la moins fréquente, et finissons par la plus fréquente (de loin).

5.1 Waist du faisceau incident au foyer objet de L_1

Ce réglage est assez difficile à réaliser, car on ne sait pas où précisément se trouve le waist issu d'un laser. Par contre le situation est théoriquement possible.
Après la traversée de L_1, le waist w_0' se trouve au foyer image de L_1, c'est à dire aussi au foyer objet de L_2. Après la traversée de L_2, le waist image w_0'' se trouve au foyer image de L_2 et sa largeur est

$$w_0'' = \frac{\lambda f_2'}{\pi w_0'} = \frac{\lambda f_2'}{\pi \lambda f_1'/(\pi w_0)} = \frac{f_2'}{f_1'} w_0$$

Le waist image se trouve donc au foyer image de L_2, et est élargi d'un facteur f_2'/f_1'. Il en résulte que la divergence du faisceau image est

$$\theta'' = \frac{f_1'}{f_2'} \theta$$

où θ est la divergence du faisceau incident. La raison est que la divergence est inversement proportionnelle au waist.

5.2 Waist proche de L_1

Dans cette situation, on place le waist à une distance de L_1 petite devant la distance de Rayleigh. Cela peut se faire en plaçant L_1 directement à la sortie du laser.
On a vu que dans ce cas, le waist w_0' se trouve au foyer image de L_1 (c'est à dire aussi au foyer objet de L_2) après la traversée de L_1, et que $w_0' = f' w_0 / z_R = f' \lambda / (\pi w_0)$. La situation est alors la même que dans le cas précédent : le faisceau sortant de L_2 aura son waist au foyer image de L_2, avec une largeur $w_0'' = w_0 f_2'/f_1'$ et une divergence $\theta'' = \theta f_1'/f_2'$.

On constate qu'un afocal permet d'élargir un faisceau gaussien conformément à l'optique géométrique et de diminuer d'autant sa divergence. On peut aussi s'en servir pour diminuer le diamètre d'un faisceau laser, mais en augmentant d'autant sa divergence.

6 Image d'un faisceau gaussien par un filtre spatial

Pour obtenir un faisceau laser large, une technique simple consiste à faire passer un faisceau issu d'un laser à travers une lentille de courte focale ou un objectif de microscope : on obtient alors un faisceau gaussien très divergent. Un problème se pose cependant : à cause des défauts de la lentille et/ou des interférences entre les ondes réfléchies et transmises entre les dioptres de l'objectif, il y a des faisceaux parasites en plus du faisceau gaussien qui nous intéresse. On filtre ces faisceaux parasites en plaçant un petit trou appelé pinhole au niveau du waist image. Ce trou doit avoir un diamètre assez grand pour que le faisceau gaussien ne soit pas diffracté : il doit donc avoir un diamètre supérieur à $2w_0'$ (qui est le diamètre du waist image). Par contre, il doit être assez petit pour filtrer les faisceaux parasites. Un diamètre convenable se situe entre $3w_0'$ et $4w_0'$. Par exemple, pour un waist image de 3 μm, c'est à dire un diamètre de faisceau gaussien de 6 μm, un pinhole ayant un diamètre de 9 à 12 μm convient.
En pratique, on détermine la largeur du waist image par $w_0' = \lambda f'/(\pi w_0)$ où f' est la distance focale de l'objectif et w_0 le waist du faisceau incident, puis on en déduit la taille adaptée du pinhole.