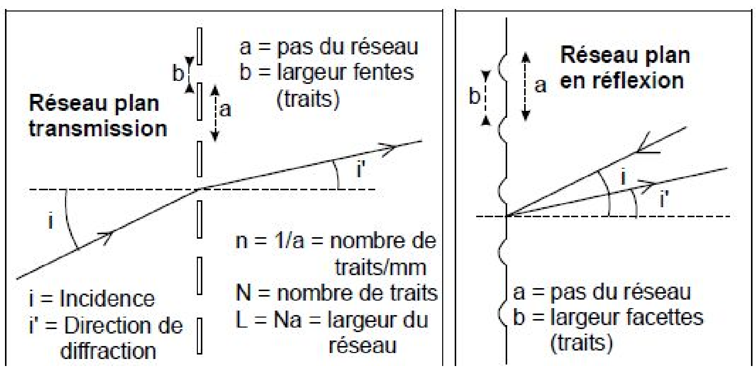
Les réseaux plans

1 Définition; notations

Un réseau est un diaphragme dont la transmittance est périodique. L'intensité lumineuse diffractée par un réseau est donc le produit de l'intensité diffractée par un motif de la période et du terme d'interférence entre les différents motifs périodiques.
Un ensemble de fentes fines, coplanaires, parallèles et équidistantes, séparées par des bandes opaques, constitue un réseau. Il existe deux classes de réseaux :

- Les réseaux par transmissions, qui sont traversés par la lumière.
- Les réseaux par réflexion, pour lesquels les fentes sont des bandes réfléchissantes.

Nous considérons le réseau comme une ouverture composées d'éléments identiques ayant la forme de rectangles longs et étroits, de largeur b. Ces rectangles sont appelés traits. La distance a entre deux traits est appelée le pas du réseau. Si a est exprimé en mm, $1/a$ est le nombre de traits par mm.
On utilise les notations de la figure ci-dessous :



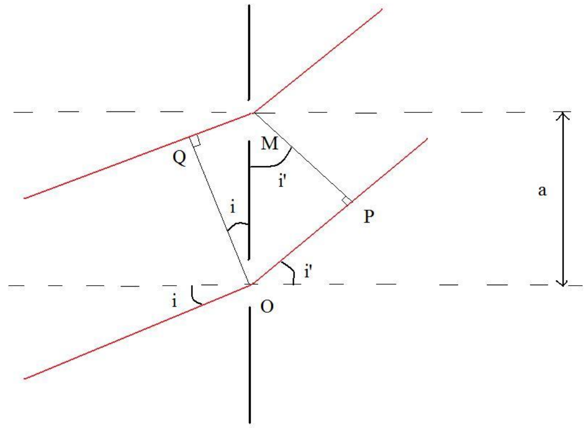
2 Intensité diffractée par un réseau

On sait que l'intensité est le produit de deux termes :

- le facteur de diffraction, égal à l'intensité diffractée par un trait.
- le facteur d'interférences résultant de la superposition des ondes diffractées par tous les traits.

2.1 Amplitudes et déphasages des ondes diffractées

On suppose le réseau éclairé par une onde plane, dont les rayons sont perpendiculaires aux traits. Tous les traits sont alors éclairés avec la même amplitude lumineuse, et, dans une direction donnée, toutes les ondes diffractées ont la même amplitude (attention : pas amplitude complexe car il y a un déphasage). Le déphasage entre deux ondes diffractées dans la même direction par deux traits voisins est donné par la différence de marche δ entre les rayons émis par deux points homologues.
Pour un réseau par transmission, on trouve $\delta = a(\sin i - \sin i')$. Dans un réseau par réflexion, on remplace i' par $\pi - i'$ et la relation devient $\delta = a(\sin i + \sin i')$. Démonstration : on utilise les notations de la figure ci-dessous. $\delta = QM - OH = a \sin i - a \sin i'$.
Le déphasage est $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$.



2.2 Amplitude complexe des ondes émergentes

On note A_0 l'amplitude de l'onde plane incidente, et on choisit l'origine des phases pour l'onde diffractée par le premier trait : $\varphi_1 = 0$. La phase de l'onde diffractée par le 2ième trait est $\varphi_2 = \varphi$, par le 3ième trait $\varphi_3 = 2\varphi$, par le $k$ième trait $\varphi_k = (k-1)\varphi$.
Les amplitudes complexes diffractées par les traits sont donc :

$$\mathcal{A}_1 = A_0; \quad \mathcal{A}_2 = A_0 e^{i\varphi}; \ldots ; \mathcal{A}_k = A_0 e^{i(k-1)\varphi}; \ldots ; \mathcal{A}_N = A_0 e^{i(N-1)\varphi}$$

où N est le nombre total de traits.
L'amplitude complexe totale diffractée est

$$A = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{A}_k = A_0 \sum_{k=1}^{N} e^{i(k-1)\varphi} = A_0 \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = A_0 e^{i(N-1)\varphi/2} \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$$

2.3 Expression de l'intensité résultante

On a calculé le terme d'interférence des ondes diffractées par le réseau.

$$I(P) = I_0(P) \left(\frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \right)^2$$

où $I_0(P)$ est l'intensité diffractée par un trait au point P. Pour un trait rectangulaire, $I_0(P)$ est un sinus cardinal au carré :

$$I_0(P) = I_0 \left(\frac{\sin(Ub/2)}{Ub/2} \right)^2 \text{ avec } U = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha') = \frac{2\pi}{\lambda}(\sin i \mp \sin i')$$

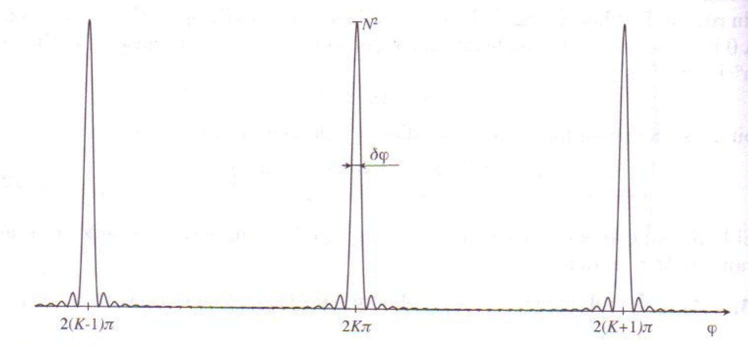
où b est la largeur d'un trait.
$I(P)$ est le produit de cette fonction de diffraction par le terme d'interférence dont l'allure est la suivante : Le facteur d'interférence présente des pics pour $\varphi = 2K\pi$, K entier. K est appelé l'ordre de diffraction. Les pics ont lieu pour $2\pi a(\sin i \mp \sin i')/\lambda = 2K\pi$, c'est à dire pour

$$\sin i \mp \sin i' = K\frac{\lambda}{a}$$

C'est la relation fondamentale des réseaux. Elle est connaître. Elle montre que si la lumière incidente contient plusieurs longueurs d'onde, celles-ci sont diffractées dans des directions i' différentes. Cette dispersion augmente avec l'ordre K (voir exercices). Cette dispersion est l'intérêt essentiel des réseaux.
La valeur du maximum du terme d'interférence est N^2. L'intensité des ordres est donc élevée.
Ce facteur d'interférence s'annule pour $\varphi = 2p\pi/N$, p entier, sauf si p/N est entier. On

FIG. 13.16 Facteur d'interférences d'un réseau.

La figure représente le graphe de la fonction $\mathscr{R}(\varphi)$ pour un réseau comportant 50 éléments. Les maximums principaux sont aux abscisses $\varphi = 2K\pi$, leurs ordonnées sont égales à N^2, leurs largeurs à $2\pi/N$.



en déduit la largeur d'un ordre entre ces deux zéros, par exemple autour de l'ordre 0 : $2\pi/N - (-2\pi/N) = 4\pi/N$. La largeur à mi-hauteur est environ la moitié, soit $\delta\varphi = 2\pi/N$. L'allure de $I(P)$ est donnée sur la figure ci-dessous pour différentes valeurs de N :

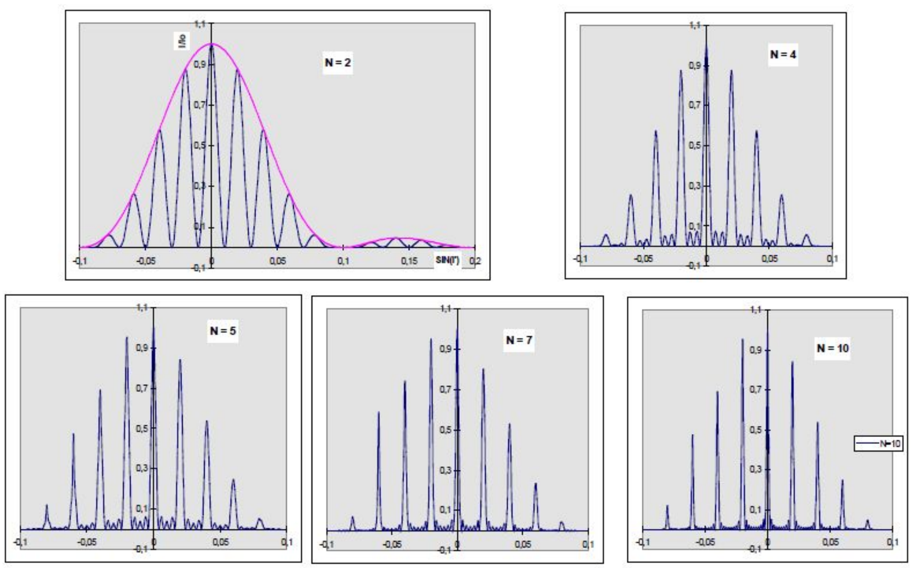


Figure 1: Les ordres deviennent de plus en plus fins lorsque N augmente.

3 Réseaux blazés

Les réseaux plans, qu'ils soient par transmission ou par réflexion, diffractent le maximum d'intensité dans l'ordre 0, là où il n'y a pas de dispersion. Ceci n'est pas intéressant. Les réseaux blazés, ou réseaux échelettes, sont des réseaux non-plans mais qui permettent de diffracter un maximum de lumière dans un ordre non-nul qu'on peut fixer.

3.1 Présentation

Les réseaux blazés sont des réseaux par réflexion, formés de facettes réfléchissantes faisant un angle α avec le plan du réseau. Si b est la largeur d'une facette et a le pas du réseau, on a $b/a = \cos\alpha$. Comme précédemment, on désigne par i l'angle d'incidence et i' l'angle de diffraction par rapport à la normale au plan du réseau. Nous introduisons l'angle θ que font les rayons diffractés avec la direction R symétrique de celle des rayons incidents par rapport à la normale au plan des facettes.

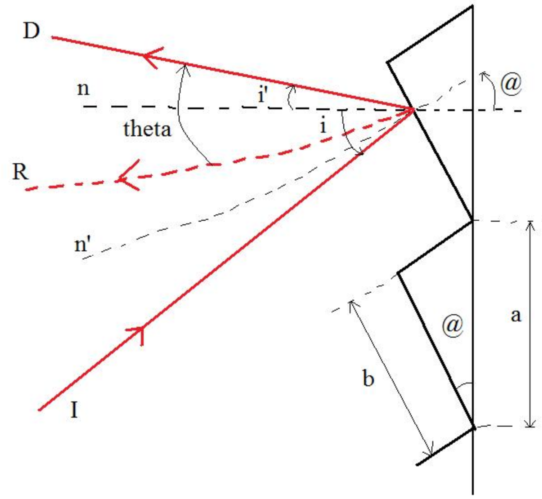


Figure 2: Les traits ont la forme de triangles rectangles. Le plan des facettes réfléchissantes fait l'angle α avec le plan moyen du réseau. La largeur d'une facette est b et le pas du réseau est a. On a $b/a = \cos\alpha$. Le réseau est éclairé par une onde plane. Le rayon incident I fait l'angle i avec la normale n au plan du réseau. R est la direction de réflexion suivant les lois de Descartes, symétrique de I par rapport à la normale aux facettes n'. La direction D du rayon diffracté fait l'angle i' avec la normale n et l'angle θ avec la direction R.

3.2 Diffraction par une facette

La diffraction par une facette unique revient à la diffraction par une fente de largeur b autour de la direction R (qui est la direction du rayon réfléchi selon l'optique géométrique). L'intensité diffractée par une facette est donc maximale dans la direction R, c'est à dire dans la direction $\theta = 0$.
L'intensité diffractée par une facette est proportionelle à

$$\left(\frac{\sin(Ub/2)}{Ub/2}\right)^2$$

avec $U = \frac{2\pi}{\lambda}\alpha' = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta$. Donc l'intensité diffractée par une facette est proportionnelle à

$$\left(\frac{\sin(\pi b\sin\theta/\lambda)}{\pi b\sin\theta/\lambda}\right)^2$$

Elle est maximale pour $\theta = 0$ et s'annule pour les θ_m tels que $\sin\theta_m = m\lambda/b$ où m est un entier non-nul.

3.3 Interférences entre les facettes

Les directions des maximums de la fonction réseau sont données par :

$$\sin i'_K + \sin i = K\lambda/a$$

En général, aucune de ces directions ne correspond à la direction du maximum de diffraction. Les angles i' et θ sont reliés par :

$$i' = i + 2(\alpha - i) + \theta = \theta + 2\alpha - i$$

Intéressons nous au cas où les rayons incidents sont normaux aux facettes : on a alors $i = \alpha$ et la direction R est perpendiculaire aux facettes. On a alors $i' = \theta + \alpha$.
La condition sur les ordres d'interférence s'écrit : $\sin(\theta + \alpha) + \sin\alpha = K\lambda/a$.
Supposons à présent que la hauteur $a\sin\alpha$ d'une facette soit un multiple entier de $\lambda/2$:

$2a \sin \alpha = K\lambda$. Il y a alors un ordre de diffraction dans la direction $\theta = 0$ normale aux facettes. En effet, dans cette direction $i' = \alpha$ et la relation fondamentale des réseaux s'écrit

$$\sin \alpha + \sin \alpha = K\lambda/a$$

On a donc l'ordre K dans la direction du maximum de diffraction par une facette unique. Les ordres $K + p$ sont dans les directions θ_p telles que

$$\sin(\theta_p + \alpha) + \sin \alpha = (K + p)\lambda/a$$

En soustrayant $2 \sin \alpha = K\lambda/a$ des deux côtés, on trouve

$$\sin(\theta_p + \alpha) - \sin \alpha = p\lambda/a$$

Si le pas a du réseau est très grand devant la longueur d'onde, les angles θ_p sont petits car la différence des sinus est petite. On trouve alors : $\theta_p \cos \alpha \simeq p\lambda/a$, c'est à dire

$$\theta_p \simeq p\lambda/b$$

Ces ordres coïncident à peu près aux zéros de la diffraction par une facette. On en déduit que l'essentiel de la lumière est diffractée dans l'ordre K.
On voit que le réseau fonctionne de manière optimale pour une longueur d'onde telle que la hauteur d'une facette soit un multiple de la demi-longueur d'onde. Pour une longueur d'onde voisine, l'ordre K de diffraction sera dans la tache centrale de diffraction par une facette, un peu moins lumineux. Les autres ordres $K + p$ ne seront pas totalement éteints.

3.4 Résumé

Dans les conditions suivantes :

- onde incidente normale au plan des facettes
- hauteur des facettes égale à un multiple de $\lambda/2$
- pas du réseau beaucoup plus grand que la longueur d'onde

toute la lumière est renvoyée dans l'ordre K.
Ces conditions sont très restrictives, mais les propriétés du réseau blazé sont encore approximativement valables si on s'en écarte légèrement : une forte proportion de la lumière est concentrée dans un ordre unique différent de zéro (environ 70%). La condition sur le pas du réseau n'est généralement pas valable (le pas est souvent comparable à la longueur d'onde), mais les conclusions énoncées le restent approximativement.