

# Principe d'Huygens-Fresnel Diffraction de la lumière

Lorsqu'on cherche à restreindre les dimensions latérales d'un faisceau lumineux, la lumière ne suit plus les lois de l'optique géométrique. C'est ce que l'on observe en plaçant une lame de rasoir en travers d'un faisceau lumineux : la frontière entre l'ombre et la lumière n'est pas nette, mais constituée de franges. De même, si on cherche à faire passer le faisceau à travers un petit trou, le faisceau s'étale et on observe des cercles lumineux autour de la tache centrale. Ce phénomène est nommé *diffraction*.

## 1 Principe d'Huygens-Fresnel

Ce principe permet d'étudier en pratique la propagation d'un faisceau lumineux, et en particulier la diffraction.

*Contribution d'Huygens :* La lumière se propage de proche en proche. Chaque point atteint par elle se comporte comme une source secondaire de lumière et émet une onde sphérique proportionnelle à l'onde incidente.

*Contribution de Fresnel :* L'amplitude complexe de l'onde lumineuse en un point P est la somme des amplitudes complexes des ondes sphériques atteignant P et émises par les sources secondaires M.

$$A(P) = \sum_M A(M) Q \frac{e^{ikMP}}{MP}$$

où  $A(M)$  est l'amplitude de l'onde en M,  $A(P)$  celle de l'onde en P,  $Q$  est un facteur d'inclinaison ou d'obliquité qui dépend de l'orientation de M par rapport à P, et  $k$  est la valeur du vecteur d'onde.

## 2 Application à la diffraction par un diaphragme plan

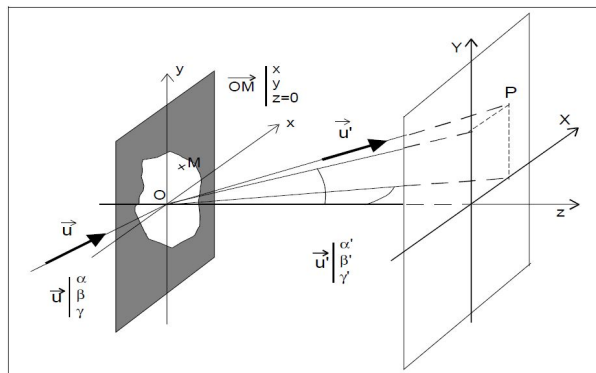


Figure 1: Choix des coordonnées pour la diffraction par un diaphragme plan. Les points M se trouvent à l'intérieur du diaphragme de centre O. La lumière arrive dans la direction  $\vec{u}$  et repart dans la direction  $\vec{u}'$ . On suppose le diaphragme petit devant la distance  $z$  qui le sépare de l'écran, de sorte que  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont les mêmes pour tous les points M. Le point P a pour coordonnées  $(X, Y, z)$ .

Comme illustré sur la figure 1, on considère un diaphragme plan à travers lequel passe la lumière et on observe le faisceau diffracté sur un écran parallèle au diaphragme. Seuls les points M à l'intérieur du diaphragme contribuent, les autres étant empêchés par l'écran.

On suppose la distance  $z$  entre le diaphragme et l'écran grande devant la taille  $a$  du diaphragme, de sorte que la distance  $PM$  est approximativement la même pour tous les points  $M$ , et que les angles de diffraction sont petits. On admet qu'alors  $Q = -i/\lambda$ . L'amplitude en un point  $P$  de l'écran s'écrit alors :

$$A(P) = \frac{-i}{\lambda} \int_{M \in \text{diaphragme}} A(M) \frac{e^{ikMP}}{MP} dx dy \simeq \frac{-i}{z\lambda} \int_{M \in \text{diaphragme}} A(M) e^{ikMP} dx dy$$

car  $MP \simeq z$ . On ne peut pas utiliser cette approximation dans l'exponentielle car  $kMP \gg 1$  et un petit changement de  $MP$  entraîne un grand changement de l'exponentielle.

On peut écrire :

$$MP = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{X^2 + Y^2 + x^2 + y^2}{z^2} - 2 \frac{xX + yY}{z^2}}$$

$$MP \simeq z \left( 1 + \frac{X^2 + Y^2 + x^2 + y^2}{2z^2} - \frac{xX + yY}{z^2} \right)$$

Or  $X/z = \tan \theta_x \simeq \theta_x$  et  $\alpha' = \cos \theta_y \sin \theta_x \simeq \sin \theta_x \simeq \theta_x$ . Donc  $X/z = \alpha'$ . De même  $Y/z = \beta'$ . Donc

$$MP = z(1 + \alpha'^2 + \beta'^2) + \frac{x^2 + y^2}{2z} - (\alpha'x + \beta'y)$$

Le premier terme est une constante car il ne dépend pas de  $M$ . Les deux autres termes dépendent de  $M$ . Le premier est important tant que  $z$  n'est pas trop grand : on parle d'approximation de Fresnel lorsqu'on le prend en compte. Cela décrit par exemple les franges obtenues avec la lame de rasoir.

La plupart du temps, on choisit  $z$  suffisamment grand pour négliger ce terme quadratique, et la dépendance en  $M$  se ramène au terme linéaire. On parle alors d'approximation de Fraunhofer ou de diffraction à l'infini.

On trouve alors :

$$A(P) = \frac{-i e^{ikz(1+\alpha'^2+\beta'^2)}}{z\lambda} \int_{M \in \text{diaphragme}} A(M) e^{-ik(\alpha'x+\beta'y)} dx dy \propto \int_{M \in \text{diaphragme}} A(x, y, 0) e^{-ik(\alpha'x+\beta'y)} dx dy$$

Cette relation entre l'amplitude complexe de  $P$  et celles des points  $M$  est appelée transformation de Fourier. L'amplitude de l'onde sur l'écran est la transformée de Fourier de l'onde passant le diaphragme.

### 3 Approximation de Fraunhofer ou diffraction à l'infini

#### 3.1 Cas d'une onde incidente plane normale au diaphragme

##### 3.1.1 Expression de $A(P)$

Dans ce cas, l'amplitude  $A(M) = a$  est la même pour tous les points  $M$  car le plan du diaphragme correspond à un plan d'onde. On a alors

$$A(P) \propto a \int_{M \in \text{diaphragme}} e^{-ik(\alpha'x+\beta'y)} dx dy$$

Pour des formes simples de diaphragme (fente, disque), cette intégrale peut se calculer.

##### 3.1.2 Interprétation de l'exponentielle complexe

Posons  $\vec{k}' = k\vec{u}' = (k\alpha', k\beta', k\gamma')$ . On a alors

$$k(\alpha'x + \beta'y) = \vec{k}' \cdot \vec{OM}$$

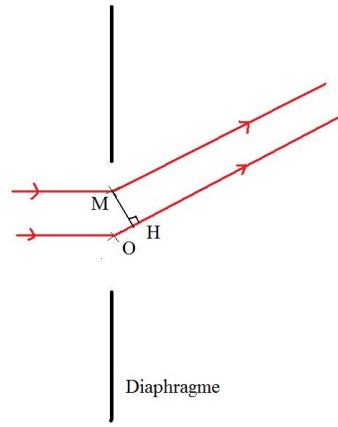


Figure 2: Le rayon issu de O allant vers P possède une avance de marche de  $OH$  sur le rayon issu de M allant vers P.

car  $\vec{OM} = (x, y, 0)$ . Comme illustré sur la figure 2, la différence de marche entre les rayons issus de O et de M est  $\delta = -OH = \vec{u}' \cdot \vec{OM}$ . La différence de phase entre ces rayons est  $\varphi = -kOH = -\vec{k}' \cdot \vec{OM}$ . On fait donc interférer toutes les ondes issues des points M avec la différence de phase  $\varphi$  par rapport à O.

Cette méthode pour retrouver l'expression de  $A(P)$  est à retenir et à savoir appliquer.

### 3.2 Cas d'une onde incidente plane faisant un angle quelconque avec le diaphragme

#### 3.2.1 Expression de $A(P)$

On pose  $\vec{k} = k\vec{u} = (k\alpha, k\beta, k\gamma)$ . L'onde plane arrivant sur le diaphragme a pour amplitude  $A(M) = ae^{i\vec{k} \cdot \vec{OM}} = ae^{ik(\alpha x + \beta y)}$ . Si l'onde incidente est perpendiculaire au diaphragme, on retrouve bien  $A(M) = a$ .

$$A(P) \propto a \int_{M \in \text{diaphragme}} e^{ik((\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y)} dx dy$$

#### 3.2.2 Interprétation de l'exponentielle complexe

L'argument de l'exponentielle complexe peut se réécrire  $\varphi = (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{OM}$ . Sur la figure

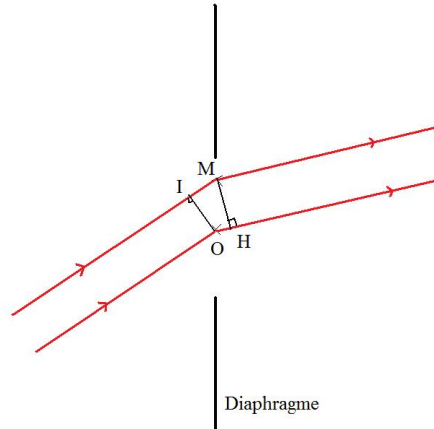


Figure 3: Le rayon issu de M allant vers P possède un retard de marche  $IM - OH$  sur celui issu de O.

3, on voit que la différence de marche entre les rayons issus de M et O est  $IM - OH$ . Or

$IM = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$  et  $OH = \vec{u}' \cdot \overrightarrow{OM}$ . La différence de marche entre le rayon issu de M et celui issu de O est donc  $\delta = (\vec{u} - \vec{u}') \cdot \overrightarrow{OM}$  et la différence de phase  $\varphi = k\delta = (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \overrightarrow{OM}$ . La figure 3 montre que  $\varphi$  s'identifie à la différence de phase entre le rayon issu de M et celui issu de O. On peut donc obtenir l'expression de  $A(P)$  en faisant interférer des ondes planes dont le déphasage par rapport à O est  $\varphi$ . En retrouvant  $\varphi$ , on retrouve  $A(P)$ .

### 3.3 Transmittance d'un diaphragme

Lorsque l'onde incidente est plane et tombe normalement sur le diaphragme, la fonction  $A(M) = A(x, y)$  s'identifie, à une constante multiplicative près sans intérêt, à la fonction caractéristique du diaphragme ou transmittance  $t(x, y)$  que l'on définit par le rapport des amplitudes complexes immédiatement avant et après le diaphragme.

Cette transmittance est souvent simple :  $t(x, y) = 1$  à l'intérieur du diaphragme et  $t(x, y) = 0$  ailleurs. Mais elle peut être plus compliquée : par exemple si le diaphragme est constitué d'une lame de verre d'épaisseur constante, il induit un déphasage  $\phi$  et  $t(x, y) = e^{i\phi}$ . Si l'épaisseur est variable,  $\phi$  dépend de la position du point M. On peut aussi envisager que le diaphragme absorbe plus ou moins la lumière suivant la position (par exemple laisse passer la lumière au centre, puis la laisse de moins en moins passer lorsqu'on s'éloigne du centre).

Dans ce cas,

$$A(P) \propto \int_{M \in \text{diaphragme}} t(x, y) e^{-ik(\alpha'x + \beta'y)} dx dy$$

$A(P)$  est la transformée de Fourier de la transmittance.

## 4 Diffraction à l'infini par une fente

On s'intéresse à la diffraction à l'infini d'une onde plane par une fente.

### 4.1 Montage

Idéalement, on place une source ponctuelle au foyer objet d'une lentille  $L_1$ , ce qui produit une onde plane en sortie de la lentille. On éclaire une fente avec cette onde plane, puis on observe l'image obtenue sur un écran placé soit suffisamment loin, soit dans le plan focal d'une lentille  $L_2$ . Cette dernière solution permet de ramener à distance finie une image se formant à l'infini.

En fait, pour avoir plus de luminosité, on éclaire  $L_1$  avec une fente source parallèle à la fente. Pour des raisons de cohérence spatiale, il faut que cette fente source soit la plus fine possible pour observer des franges.

### 4.2 Amplitude diffractée par une fente infiniment longue

Soient  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un point de la fente. On suppose la fente parallèle à l'axe des  $y$ . La fente a pour largeur  $a$  et sa transmittance vaut 1 pour  $-a/2 \leq x \leq a/2$  et 0 sinon. Soient  $X$  et  $Y$  les coordonnées du point P de l'écran où on fait l'observation. On note  $\alpha = X/z$  ou  $\alpha = x/f_2$  selon que l'écran se trouve à grande distance  $z$  ou dans le plan focal image de  $L_2$ .

Comme la fente est infiniment longue selon  $y$ , il y a invariance par translation de l'image de diffraction le long de l'axe  $Y$ . Il suffit de calculer le long de l'axe  $X$ .

Si O est le centre de la fente, la différence de marche entre un rayon issu de  $M(x; 0)$  et un autre issu de  $O(0; 0)$  est  $\delta = -OH = -\alpha x$ . Et la différence de phase est

$$\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x = -Ux$$

On en déduit

$$A(P) = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-iUx} dx \quad (1)$$

$$= \left[ \frac{1}{-iU} e^{-iUx} \right]_{-a/2}^{a/2} \quad (2)$$

$$= \frac{e^{-iUa/2} - e^{iUa/2}}{-iU} \quad (3)$$

$$= a \frac{e^{iUa/2} - e^{-iUa/2}}{iUa} \quad (4)$$

$$= a \frac{\sin(Ua/2)}{Ua/2} = a \operatorname{sinc}(Ua/2) \quad (5)$$

où sinc désigne le sinus cardinal.

### 4.3 Intensité diffractée

$$I(P) = |A(P)|^2 = I_0 \left[ \frac{\sin(Ua/2)}{Ua/2} \right]^2$$

avec  $U = 2\pi X/(\lambda f_2)$ .

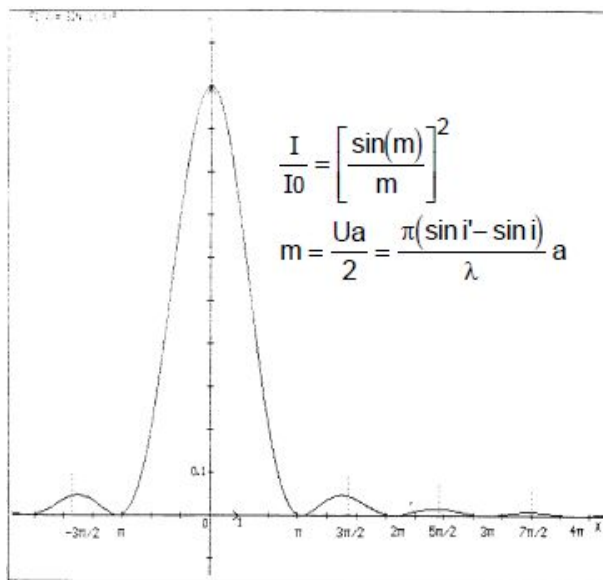


Figure 4: Allure de l'intensité diffractée par une fente en fonction de  $m = Ua/2$

## 4.4 Etude des fonctions sinc et sinc<sup>2</sup>

### 4.4.1 Allure des deux fonctions

#### 4.4.2 Valeurs particulières des deux fonctions

Pour  $x$  petit,  $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x \simeq x/x = 1$ .

Les deux fonctions s'annulent lorsque le sinus s'annule, sauf en  $x = 0$ . Donc  $\operatorname{sinc}(x)$  s'annule pour  $x = k\pi$ ,  $k \neq 0$ . Cela signifie qu'on observe des franges sombres d'abscisses  $Ua/2 = k\pi$ , soit  $\pi a X/(\lambda f_2) = k\pi$ , ou encore  $X = k\lambda f_2/a$ .

La tache centrale, entre  $k = -1$  et  $k = 1$ , a pour largeur  $2\lambda f_2/a$ . Les autres taches sont deux fois moins larges.

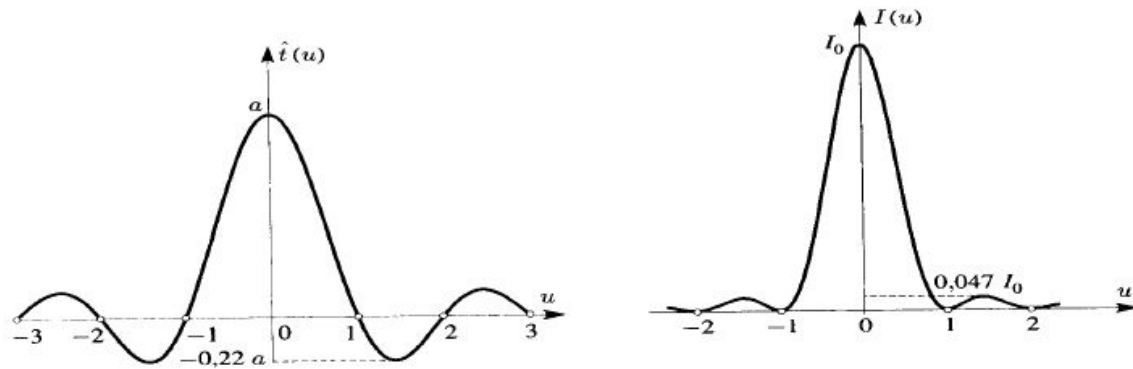


Figure 5: A gauche,  $\text{sinc}(x)$ , à droite,  $I_0 \text{sinc}^2(x)$

La fonction sinc admet des minima et des maxima. On les trouve en annulant la dérivée de sinc :  $\text{sinc}'(x) = (\sin x/x)' = (x \cos x - \sin x)/x^2$  qui s'annule pour  $x = \sin x / \cos x = \tan x$ . Cette équation doit être résolue numériquement ou graphiquement. On observe qu'à

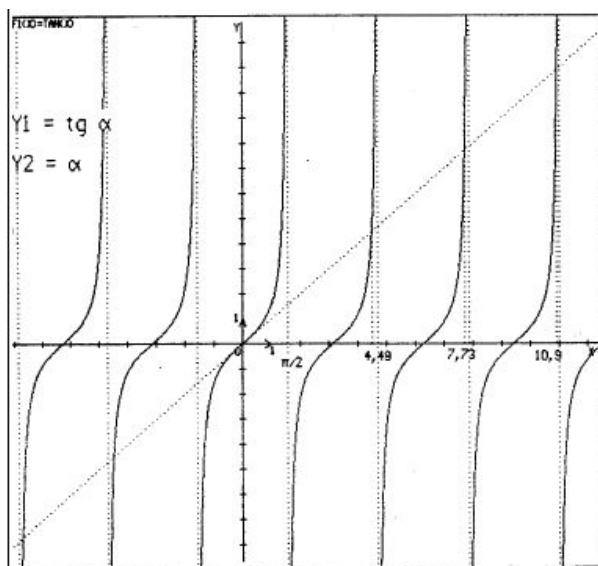


Figure 6: Les points d'intersection des courbes  $y=x$  et  $y=\tan(x)$  ont pour abscisse les minima et maxima de  $\text{sinc}(x)$ , c'ad les maxima de  $\text{sinc}^2(x)$ .

part le maximum central, les extremums de sinc, qui sont les maxima de  $\text{sinc}^2$ , ont à peu près pour abscisse  $x = \pi/2 + k\pi$ . sinc prend alors la valeur  $(-1)^k / (\pi/2 + k\pi)$ , et  $\text{sinc}^2$  la valeur  $1/(\pi^2(k + 1/2)^2)$ . Pour le  $k^{\text{ième}}$  maximum secondaire, on trouve une abscisse  $Ua/2 = \pi(k + 1/2)$ , soit  $X = (k + 1/2)\lambda f_2/a$ . Le premier maximum secondaire a pour intensité relative  $4/(9\pi^2) = 0,045$ , soit 4,5% du maximum principal.

## 5 Diffraction à l'infini par une fente rectangulaire

On considère la diffraction à l'infini d'une onde plane par une fente rectangulaire de hauteur  $a$  et de largeur  $b$ . Le montage est le même que pour une fente très longue.

### 5.1 Amplitude diffractée

On suppose que la transmittance de la fente vaut 1 pour  $x \in [-a/2; a/2]$  et  $y \in [-b/2; b/2]$ , et 0 sinon.

$$A(P) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i(Ux+Vy)} dx dy$$

avec  $U = 2\pi\alpha'/\lambda$  et  $V = 2\pi\beta'/\lambda$  où  $\vec{u}'(\alpha', \beta', \gamma')$  est le vecteur directeur du centre de la fente vers le point P.

$$A(P) = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-iUx} dx \times \int_{-b/2}^{b/2} e^{-iVy} dy = ab \frac{\sin(Ua/2)}{Ua/2} \frac{\sin(Vb/2)}{Vb/2}$$

### 5.2 Intensité diffractée

$$I(P) = I_0 \left( \frac{\sin(Ua/2)}{Ua/2} \right)^2 \left( \frac{\sin(Vb/2)}{Vb/2} \right)^2$$

$I(P)$  est le produit de deux sinus cardinaux au carré, un suivant la direction  $X$  et l'autre suivant la direction  $Y$  : on rappelle que  $U$  est proportionnel à  $X$  et  $V$  à  $Y$ .

La figure de diffraction consiste en une tache centrale très lumineuse, entourée à gauche et à droite, ainsi qu'au-dessus et en-dessous, par des taches secondaires correspondant à celles d'une fente de largeur  $b$  et d'une fente de largeur  $a$  respectivement. Enfin, il y a des taches qui forment un réseau de rectangles le long de lignes parallèles aux taches déjà mentionnées : ces taches sont très peu intenses.

La tache centrale est plus large dans la direction où la fente est plus étroite.

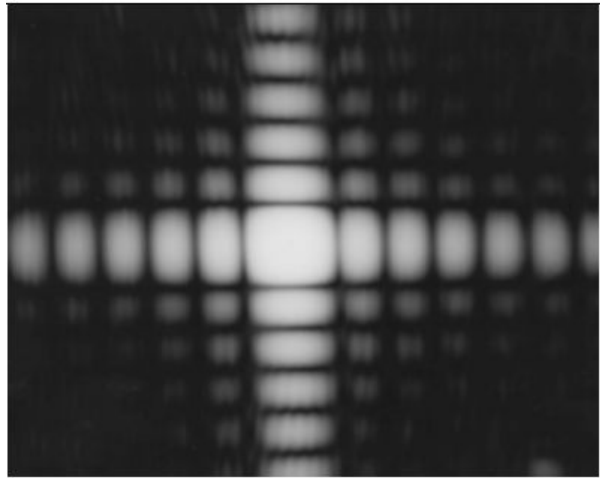


Figure 7: Figure de diffraction par une fente rectangulaire

## 6 Diffraction à l'infini par une ouverture circulaire

Cette situation est d'une grande importance pratique : dans la plupart des montages, les faisceaux lumineux sont diaphragmés par des ouvertures circulaires (monture de lentille par exemple, ou bien ouverture d'un télescope). Ce type de diffraction affecte donc la formation d'images.

## 6.1 Intensité diffractée

Le calcul de l'intensité diffractée est faisable analytiquement, mais est technique (changement de variables dans le calcul de l'intégrale, utilisation des fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1). On admet le résultat suivant pour la diffraction par une ouverture circulaire de diamètre  $D = 2R$  :

$$I(P) = I_0 \left( \frac{2J_1(UR)}{UR} \right)^2$$

où  $J_1$  est la fonction de Bessel d'ordre 1 et  $U = 2\pi\alpha'/\lambda$  avec  $\alpha' = \rho/f_2$  où  $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$  est le rayon du cercle joignant le centre de la figure de diffraction au point P. L'intensité est la même pour tous les points sur ce cercle : la figure de diffraction est composée d'anneaux concentriques lumineux et sombres.

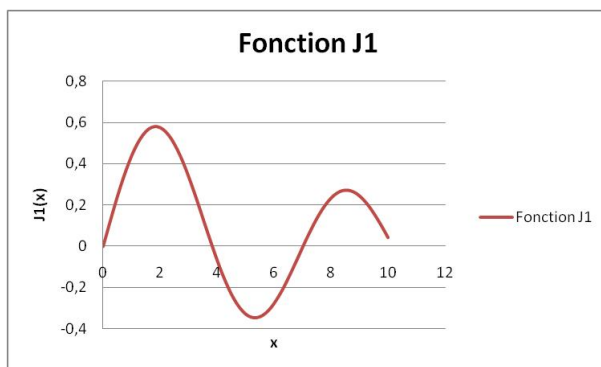


Figure 8: Figure de diffraction par une ouverture circulaire.

## 6.2 Fonction $J_1$ et caractéristiques de la figure de diffraction

### 6.2.1 La fonction $J_1$

La fonction de Bessel d'ordre 1  $J_1(m)$  ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles. Elle est définie par une intégrale ou par un développement en série entière. Ce qu'on peut en retenir, c'est qu'il s'agit d'une sorte de fonction sinus, mais qui ne serait pas strictement périodique : il s'agit d'une fonction oscillante qui s'annule en 0, mais les positions de ses zéros et des extremums n'est pas régulière et son amplitude décroît. Les premiers zéros de



$J_1$  sont en 0; 3,83; 7,01; 10,2.



### 6.2.2 Figure de diffraction

La fonction  $2J_1(m)/m$  se comporte donc comme une sorte de sinus cardinal, mais dont l'amplitude décroît plus rapidement et dont les zéros ne sont pas régulièrement espacés. L'intensité est maximale au centre puis décroît et s'annule une première fois pour  $UR =$

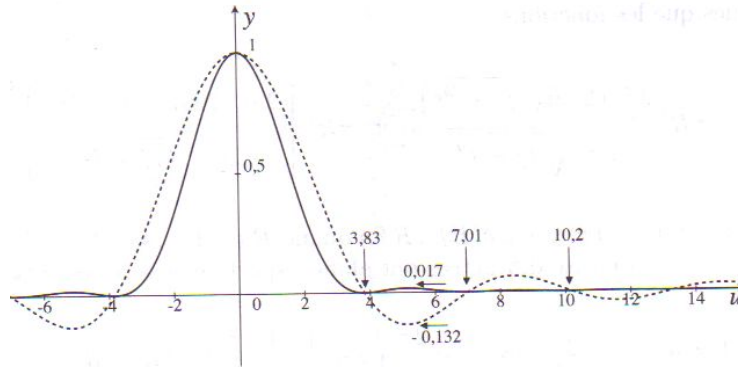


Figure 9: Fonctions  $2J_1(m)/m$  en pointillés et  $(2J_1(m)/m)^2$  en trait plein.

3,83, soit pour

$$\alpha' = \frac{3,83}{\pi} \frac{\lambda}{2R} = 1,22 \frac{\lambda}{2R}$$

La tache centrale de diffraction est comprise entre  $-\alpha'$  et  $+\alpha'$  : sa largeur angulaire vaut  $1,22 \frac{\lambda}{R}$ .

De là vient le facteur 1,22 qui intervient dans la résolution de nombreux appareils d'optique (voir aussi dans la suite du chapitre).

L'intensité du premier anneau brillant est 1,7% de celle du centre. C'est deux fois moins que l'intensité des premières taches secondaires pour une fente.

## 7 Pouvoir séparateur; critère de Rayleigh

L'image qu'un instrument d'optique donne d'un point lumineux n'est jamais strictement ponctuelle. Les aberrations et la diffraction, entre autres, font que les rayons issus d'un point lumineux ne convergent pas vers un point après traversée de l'instrument. En principe, les aberrations peuvent être corrigées par une construction adéquate de l'instrument; mais la diffraction ne peut être évitée, car elle résulte de la limitation des ondes lumineuses par les dimensions forcément finies de l'instrument.

Dans la suite, nous supposons donc les instruments d'optique parfaitement stigmatiques du point de vue de l'optique géométrique (l'image géométrique d'un point est un point). Dans le plan de cette image, on recueille donc une figure de diffraction.

Si nous avons maintenant deux points objets proches l'un de l'autre ou deux astres à l'infini dans des directions voisines, les figures de diffraction qu'ils produisent dans le plan image sont centrées sur leurs images géométriques (il n'y a pas d'interférences car ces deux points sont supposés être incohérents entre eux).

- Si la distance de ces images est beaucoup plus petite que la largeur de la figure de diffraction, on a la même apparence que si l'on avait affaire à un objet unique : les deux points ne sont pas résolus ou séparés par l'instrument.
- Si, au contraire, la distance des images est beaucoup plus grande que la largeur de la figure de diffraction, on observe deux taches bien séparées. Les points objets sont alors bien résolus par l'instrument.

- Il y a une situation intermédiaire où la distance des images n'est ni beaucoup plus petite, ni beaucoup plus grande que la largeur de diffraction : quand la distance entre les objets diminue, on passe progressivement de l'apparence de deux points distincts à celle d'un point unique, sans qu'une frontière nette puisse être définie. On peut estimer qu'on est à la limite lorsque la distance des images est égale à la largeur de la tache de diffraction. Ceci a été formulé en un critère de résolution par Rayleigh : *La limite de résolution de deux objets ponctuels est atteinte lorsque le centre de l'image de l'un coïncide avec le premier zéro de l'image de l'autre.*

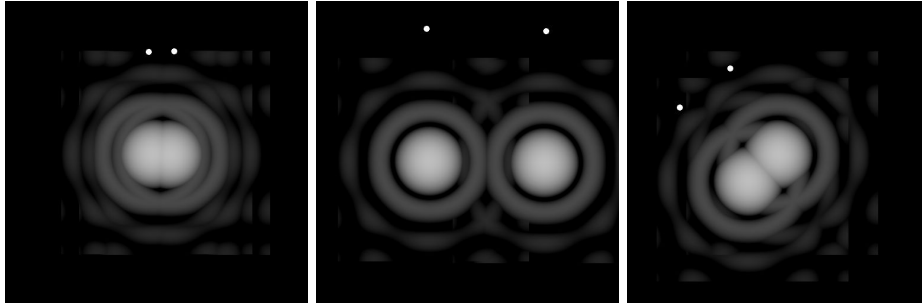
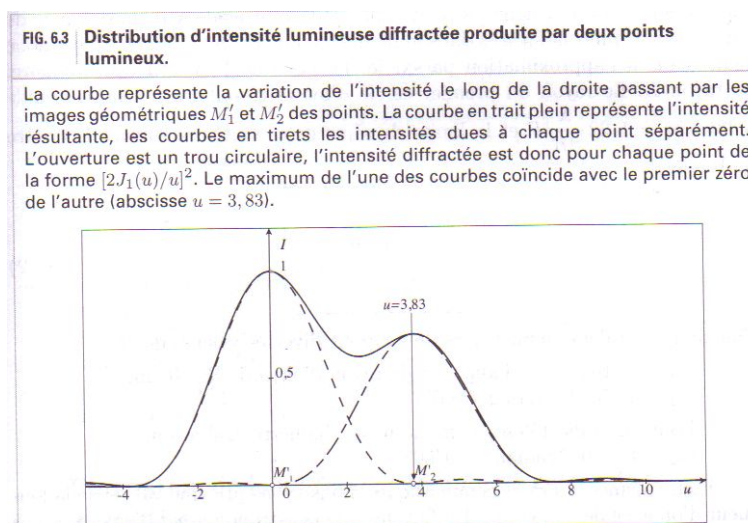


Figure 10: Simulation de l'image de deux étoiles par un télescope. A gauche : étoiles non résolues. Au milieu : étoiles résolues. A droite : limite de résolution.



Dans la plupart des cas, la pupille limitant les ondes lumineuses a une forme circulaire. Dans ce cas, la limite angulaire de séparation correspond à la demi-largeur angulaire de la tache centrale de diffraction :  $\alpha_m = 1,22\lambda/D$  où  $D$  est le diamètre de la pupille.

## 8 Cas importants relevant de l'approximation de Fresnel

Dans la plus grande partie de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la diffraction dans l'approximation de Fraunhofer, où on observe la figure de diffraction à l'infini.

Cependant, il y a des situations importantes où on observe la figure de diffraction à distance finie (approximation de Fresnel). Nous allons en mentionner deux : l'holographie et les faisceaux gaussiens.

### 8.1 Holographie

Un hologramme consiste en l'enregistrement sur une plaque photo des interférences entre une onde plane de référence et une onde diffusée par l'objet qu'on souhaite reproduire en

3D.

Pour lire l'hologramme, on l'éclaire simplement par l'onde de référence. L'hologramme se comporte comme un diaphragme dont la transmittance est compliquée. L'image est reconstituée à distance finie de ce diaphragme, par diffraction. Comme l'image est à distance finie, il s'agit bien de diffraction dans l'approximation de Fresnel.

Pour reconstruire une image par holographie numérique, il ne faut pas calculer la transformée de Fourier de l'hologramme, mais la transformée de Fresnel qui tient compte de la distance à laquelle on calcule la figure de diffraction.

## 8.2 Faisceau gaussien

L'objectif de ce paragraphe est d'expliquer qu'un faisceau gaussien est dominé par la diffraction.

On peut le comprendre intuitivement, car la décroissance rapide gaussienne de l'intensité en s'écartant du centre du faisceau revient à une limitation latérale de ce faisceau et crée donc de la diffraction.

Le profil d'un faisceau gaussien au niveau du waist peut être réalisé en éclairant par une onde plane en incidence normale un écran dont la transmittance est gaussienne. Il s'avère qu'en calculant l'amplitude de l'onde diffractée par cet écran à la distance  $z$  du waist dans l'approximation de Fresnel, on retrouve l'amplitude et la phase du faisceau gaussien à cette position.

La divergence du faisceau à grande distance s'explique alors par la diffraction. Le calcul dans l'approximation de Fresnel redonne exactement sa valeur, ainsi que celle de la largeur du faisceau en fonction de  $z$  et de la distance de Rayleigh.