

2 Application à la diffraction par un diaphragme plan

Dans tous les appareils d'optique, les dimensions finies des composants font que la lumière qui y pénètre est limitée latéralement. Il y a donc de la diffraction dans tous les instruments. Le but de ce chapitre est d'étudier en quoi elle limite leur performance.

L'application directe du principe d'Huygens-Fresnel n'est pas facile à mettre en oeuvre. Des approximations sont nécessaires, justifiées par les conditions pratiques de fonctionnement des appareils d'optique.

On peut généralement considérer que le diaphragme qui limite les faisceaux lumineux se trouve dans un plan, et que sa taille a est petite devant la distance d'observation z de la diffraction.

Cette approximation, dite approximation de Fresnel ou diffraction à distance finie, permet de calculer (souvent numériquement) la forme du faisceau lumineux en fonction de la distance z au diaphragme. Cela a des applications pour l'étude de faisceaux laser gaussiens ou de mise en forme de faisceaux par optique diffractive.

Une approximation supplémentaire, très souvent valide, consiste à supposer que la distance d'observation z est tellement grande qu'on peut considérer les ondes sphériques du principe d'Huygens-Fresnel comme des ondes planes. Cette approximation, dite de Fraunhofer ou de diffraction à l'infini, est d'une grande importance pratique et c'est la seule que nous considérerons dans la suite. Son critère de validité est :

$$a^2 \ll \lambda z$$

Dans ce cas, l'amplitude diffractée à l'infini (ou à z très très grand) est la transformée de Fourier de l'amplitude sortant tout juste du diaphragme.

3 Approximation de Fraunhofer ou diffraction à l'infini

3.1 Cas d'une onde incidente plane normale au diaphragme

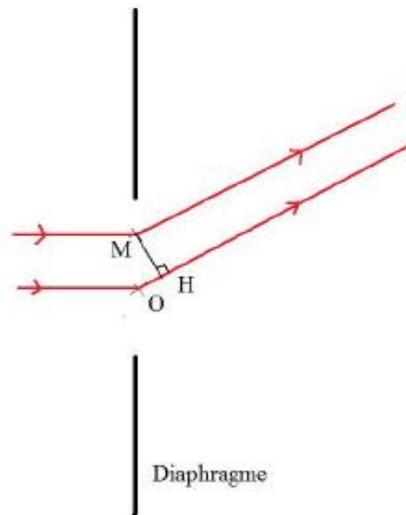


Figure 1: Le rayon issu de O allant vers P possède une avance de marche de OH sur le rayon issu de M allant vers P.

Le principe d'Huygens-Fresnel nous indique que, dans l'approximation de Fraunhofer, l'amplitude complexe diffractée à l'infini est la somme des amplitudes complexes des ondes planes diffractées par l'ensemble des points M constituant le diaphragme, en tenant compte des différences de phase et de marche entre ces ondes. La différence de marche est donnée par $\delta = OH$ et la différence de phase par $\phi = 2\pi\delta/\lambda$. Il faut faire la somme des amplitudes $a_0 e^{i\phi(M)}$ sur tous les points M .

3.1.1 Calcul de la phase d'une onde diffractée dans la direction \vec{u}' faisant un angle θ avec l'horizontale

3.2 Transmittance d'un diaphragme

Lorsque l'onde incidente est plane et tombe normalement sur le diaphragme, l'onde sortant tout juste du diaphragme s'identifie, à une constante multiplicative près sans intérêt, à la fonction caractéristique du diaphragme ou transmittance $t(x, y)$ que l'on définit par le rapport des amplitudes complexes immédiatement avant et après le diaphragme.

Cette transmittance est souvent simple : $t(x, y) = 1$ à l'intérieur du diaphragme et $t(x, y) = 0$ ailleurs. Mais elle peut être plus compliquée : par exemple si le diaphragme est constitué d'une lame de verre d'épaisseur constante, il induit un déphasage θ et $t(x, y) = e^{i\theta}$. Si l'épaisseur est variable, θ dépend de la position du point M (cas d'une lentille). On peut aussi envisager que le diaphragme absorbe plus ou moins la lumière suivant la position (par exemple laisse passer la lumière au centre, puis la laisse de moins en moins passer lorsqu'on s'éloigne du centre).

L'amplitude diffractée à l'infini est alors la transformée de Fourier de la transmittance. Cette propriété permet de calculer numériquement ou analytiquement des figures de diffraction par un diaphragme.

4 Diffraction à l'infini par une fente

On s'intéresse à la diffraction à l'infini d'une onde plane par une fente.

4.1 Montage

Idéalement, on place une source ponctuelle au foyer objet d'une lentille L_1 , ce qui produit une onde plane en sortie de la lentille. On éclaire une fente avec cette onde plane, puis on observe l'image obtenue sur un écran placé soit suffisamment loin, soit dans le plan focal d'une lentille L_2 . Cette dernière solution permet de ramener à distance finie une image se formant à l'infini.

En fait, pour avoir plus de luminosité, on éclaire L_1 avec une fente source parallèle à la fente.

4.2 Amplitude diffractée par une fente infiniment longue

4.3 Intensité diffractée

$$I(P) = |A(P)|^2 = I_0 \left[\frac{\sin(Ua/2)}{Ua/2} \right]^2$$

avec $U = 2\pi X/(\lambda f_2)$. L'intensité $I(P)$ s'annule pour $Ua/2 = p\pi$, où p est un entier non-nul. Cela signifie qu'on observe des franges sombres d'abscisses $Ua/2 = p\pi$, soit $\pi a X/(\lambda f_2) = p\pi$, ou encore $X = p\lambda f_2/a$. La tache centrale, entre $p = -1$ et $p = 1$, a pour largeur $2\lambda f_2/a$. Les autres taches sont deux fois moins larges.

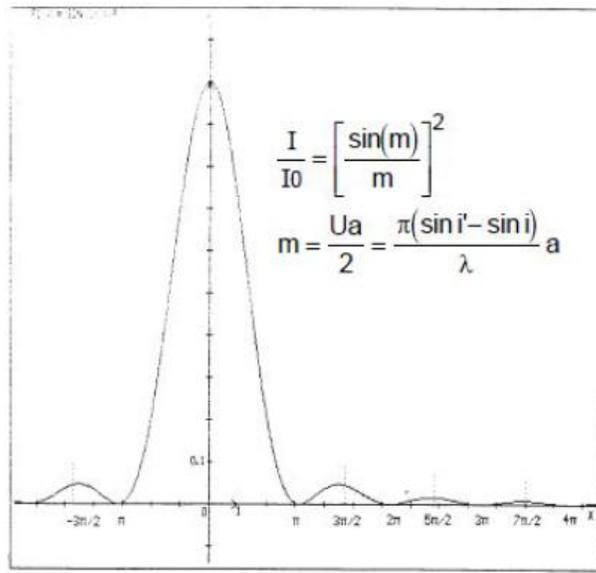


Figure 2: Allure de l'intensité diffractée par une fente en fonction de $m = Ua/2$

5 Diffraction à l'infini par une fente rectangulaire

On considère la diffraction à l'infini d'une onde plane par une fente rectangulaire de hauteur a et de largeur b . Le montage est le même que pour une fente très longue.

5.1 Amplitude diffractée

On suppose que la transmittance de la fente vaut 1 pour $x \in [-a/2; a/2]$ et $y \in [-b/2; b/2]$, et 0 sinon.

$$A(P) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i(Ux+Vy)} dx dy$$

avec $U = 2\pi\alpha'/\lambda$ et $V = 2\pi\beta'/\lambda$ où $\vec{u}'(\alpha', \beta', \gamma')$ est le vecteur directeur du centre de la fente vers le point P.

$$A(P) = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-iUx} dx \times \int_{-b/2}^{b/2} e^{-iVy} dy = ab \frac{\sin(Ua/2)}{Ua/2} \frac{\sin(Vb/2)}{Vb/2}$$

5.2 Intensité diffractée

$$I(P) = I_0 \left(\frac{\sin(Ua/2)}{Ua/2} \right)^2 \left(\frac{\sin(Vb/2)}{Vb/2} \right)^2$$

$I(P)$ est le produit de deux sinus cardinaux au carré, un suivant la direction X et l'autre suivant la direction Y : on rappelle que U est proportionnel à X et V à Y .

La figure de diffraction (figure 3) consiste en une tache centrale très lumineuse, entourée à gauche et à droite, ainsi qu'au-dessus et en-dessous, par des taches secondaires correspondant à celles d'une fente de largeur b et d'une fente de largeur a respectivement. Enfin, il y a des taches qui forment un réseau de rectangles le long de lignes parallèles aux taches déjà mentionnées : ces taches sont très peu intenses.

La tache centrale est plus large dans la direction où la fente est plus étroite.

6 Diffraction à l'infini par une ouverture circulaire

Cette situation est d'une grande importance pratique : dans la plupart des montages, les faisceaux lumineux sont diaphragmés par des ouvertures circulaires (monture de lentille par exemple, ou bien ouverture d'un télescope). Ce type de diffraction affecte donc la formation d'images.

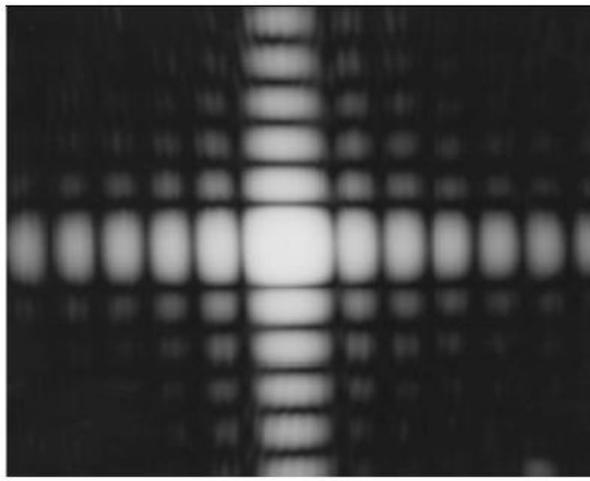


Figure 3: Figure de diffraction par une fente rectangulaire

6.1 Intensité diffractée

Le calcul de l'intensité diffractée est faisable analytiquement, mais est technique (changement de variables dans le calcul de l'intégrale, utilisation des fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1). On admet le résultat suivant pour la diffraction par une ouverture circulaire de diamètre $D = 2R$:

$$I(P) = I_0 \left(\frac{2J_1(UR)}{UR} \right)^2$$

où J_1 est la fonction de Bessel d'ordre 1 et $U = 2\pi\alpha'/\lambda$ avec $\alpha' = \rho/f_2$ où $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$ est le rayon du cercle joignant le centre de la figure de diffraction au point P. L'intensité est la même pour tous les points sur ce cercle : la figure de diffraction est composée d'anneaux concentriques lumineux et sombres.

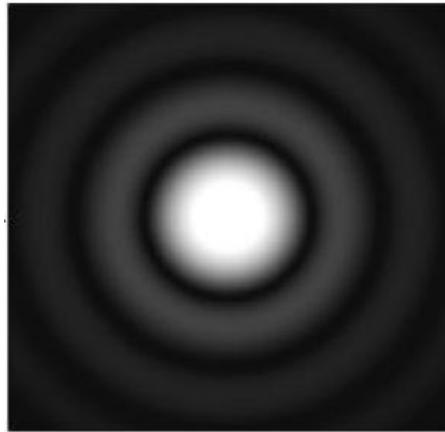


Figure 4: Figure de diffraction par une ouverture circulaire.

6.2 Caractéristiques de la figure de diffraction

L'intensité est maximale au centre puis décroît et s'annule une première fois pour $UR = 3,83$, soit pour

$$\alpha' = \frac{3,83}{\pi} \frac{\lambda}{2R} = 1,22 \frac{\lambda}{2R}$$

La tache centrale de diffraction est comprise entre $-\alpha'$ et $+\alpha'$: sa largeur angulaire vaut $1,22 \frac{\lambda}{R}$. De là vient le facteur 1,22 qui intervient dans la résolution de nombreux appareils d'optique (voir aussi dans la suite du chapitre).

L'intensité du premier anneau brillant est 1,7% de celle du centre. C'est deux fois moins que l'intensité des premières taches secondaires pour une fente.

7 Pouvoir séparateur ; critère de Rayleigh

L'image qu'un instrument d'optique donne d'un point lumineux n'est jamais strictement ponctuelle. Les aberrations et la diffraction, entre autres, font que les rayons issus d'un point lumineux ne convergent pas vers un point après traversée de l'instrument. En principe, les aberrations peuvent être corrigées par une construction adéquate de l'instrument; mais la diffraction ne peut être évitée, car elle résulte de la limitation des ondes lumineuses par les dimensions forcément finies de l'instrument.

Dans la suite, nous supposons donc les instruments d'optique parfaitement stigmatiques du point de vue de l'optique géométrique (l'image géométrique d'un point est un point). Dans le plan de cette image, on recueille donc une figure de diffraction.

Si nous avons maintenant deux points objets proches l'un de l'autre ou deux astres à l'infini dans des directions voisines, les figures de diffraction qu'ils produisent dans le plan image sont centrées sur leurs images géométriques (il n'y a pas d'interférences car ces deux points sont supposés être incohérents entre eux).

- Si la distance de ces images est beaucoup plus petite que la largeur de la figure de diffraction, on a la même apparence que si l'on avait affaire à un objet unique : les deux points ne sont pas résolus ou séparés par l'instrument.
- Si, au contraire, la distance des images est beaucoup plus grande que la largeur de la figure de diffraction, on observe deux taches bien séparées. Les points objets sont alors bien résolus par l'instrument.
- Il y a une situation intermédiaire où la distance des images n'est ni beaucoup plus petite, ni beaucoup plus grande que la largeur de diffraction : quand la distance entre les objets diminue, on passe progressivement de l'apparence de deux points distincts à celle d'un point unique, sans qu'une frontière nette puisse être définie. On peut estimer qu'on est à la limite lorsque la distance des images est égale à la largeur de la tache de diffraction. Ceci a été formulé en un critère de résolution par Rayleigh : *La limite de résolution de deux objets ponctuels est atteinte lorsque le centre de l'image de l'un coïncide avec le premier zéro de l'image de l'autre.*

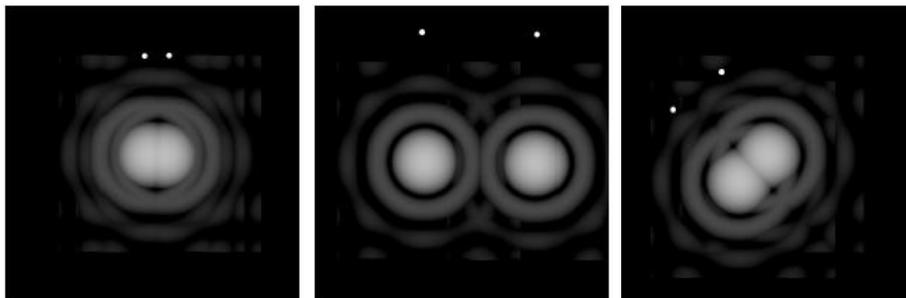


Figure 5: Simulation de l'image de deux étoiles par un télescope. A gauche : étoiles non résolues. Au milieu : étoiles résolues. A droite : limite de résolution.

Dans la plupart des cas, la pupille limitant les ondes lumineuses a une forme circulaire. Dans ce cas, la limite angulaire de séparation correspond à la demi-largeur angulaire de la tache centrale de diffraction : $\alpha_m = 1,22\lambda/D$ où D est le diamètre de la pupille.

8 Pouvoir de résolution ; fonction de transfert modulée (FTM)

Si on pouvait faire l'image d'un objet ponctuel à travers un système optique parfait, on obtiendrait une image ponctuelle. Mais à cause de la diffraction, on obtient au mieux une tache d'Airy. Si on néglige les anneaux de la tache d'Airy, on peut se demander à quelle condition on peut séparer deux points objets. La section précédente sur le critère de Rayleigh est une réponse possible. La FTM en est une autre, complémentaire et plus riche en informations.

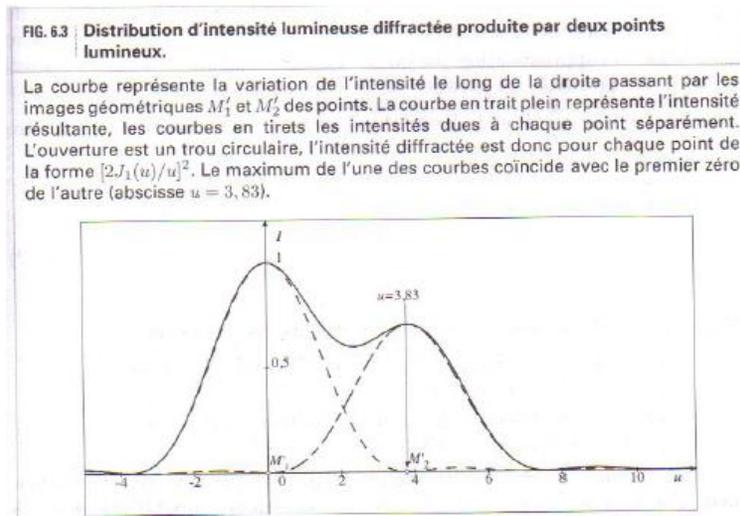


Figure 6: Illustration du critère de Rayleigh. Source : "Ondes lumineuses", R-J. Champeau et al.

L'idée consiste à faire l'image d'une mire avec l'instrument d'optique dont on souhaite définir le pouvoir séparateur. Cette mire est constituée de bandes noires et blanches alternées, et caractérisée par sa période (voir figure 7). On appelle paire de ligne une noire et une blanche consécutives. On considère le nombre

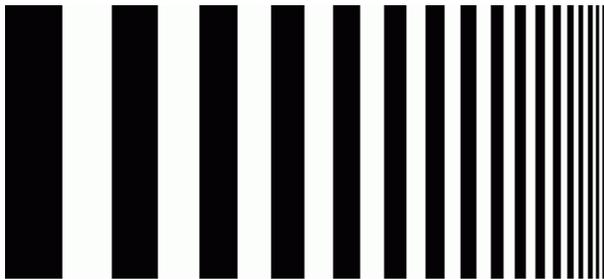


Figure 7: Mire utilisée pour la FTM. On voit la période diminuer, et donc la fréquence spatiale augmenter. Source : Wikipédia, article sur la FTM.

de paires de lignes par mm (pl/mm), appelé aussi fréquence spatiale (c'est l'inverse de la période). On s'intéresse au contraste de l'image d'une mire par l'instrument d'optique. Si la période est grande (petite fréquence spatiale), l'image est nette et bien contrastée car les lignes noires et blanches sont bien séparées. Lorsque la fréquence spatiale augmente, les lignes sont de moins en moins bien séparées car elles sont de plus en plus proches, et le contraste diminue. Pour une certaine valeur de la fréquence spatiale, appelée fréquence de coupure, le contraste s'annule. On atteint alors la limite de résolution de l'instrument d'optique exprimée en pl/mm. La courbe représentant le contraste en fonction de la fréquence spatiale est appelée courbe de FTM et est indiquée sur la figure 8 dans le cas où seule la diffraction limite le pouvoir de résolution. Si en plus de la diffraction, il y a des aberrations et/ou si la mise au point n'est pas bonne, la courbe de FTM de l'instrument d'optique se trouve en-dessous de la courbe de FTM pour une limitation par la diffraction seulement.

Plus la courbe de l'instrument est proche de celle liée à la diffraction, et meilleure est la qualité de l'instrument et des images qu'il donne. Si la FTM de l'instrument s'annule bien avant celle de la diffraction, l'instrument a un mauvais pouvoir de résolution. Mais si la FTM de l'instrument est proche de celle de la diffraction pour certaines fréquences spatiales, le contraste des images sera bon pour ces fréquences spatiales.

9 Cas importants relevant de l'approximation de Fresnel

Dans la plus grande partie de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la diffraction dans l'approximation de Fraunhofer, où on observe la figure de diffraction à l'infini.

Cependant, il y a des situations importantes où on observe la figure de diffraction à distance finie (approximativement)

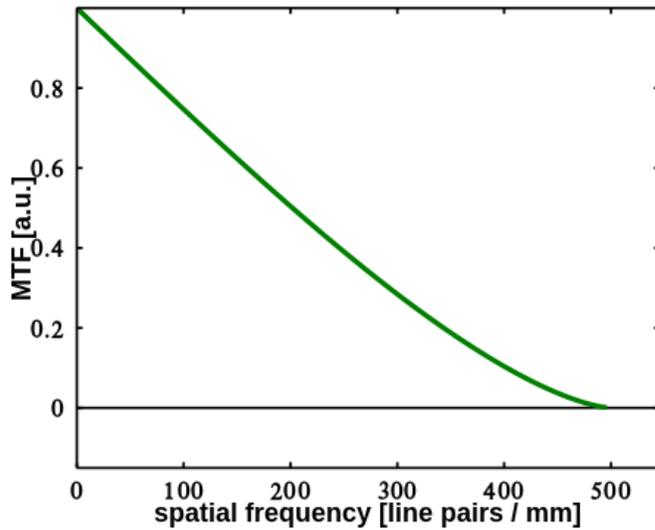


Figure 8: Courbe de FTM dans le cas où seule la diffraction limite le pouvoir de résolution. Si il y a des aberrations, ou si la mise au point n'est pas bonne, la courbe de FTM de l'instrument d'optique se trouve en-dessous de cette courbe. Source : Wikipédia, article sur la FTM.

mation de Fresnel). Nous allons en mentionner deux : l'holographie et les faisceaux gaussiens.

9.1 Holographie et optique diffractive

Un hologramme consiste en l'enregistrement sur une plaque photo des interférences entre une onde plane de référence et une onde diffusée par l'objet qu'on souhaite reproduire en 3D.

Pour lire l'hologramme, on l'éclaire simplement par l'onde de référence. L'hologramme se comporte comme un diaphragme dont la transmittance est compliquée. L'image est reconstituée à distance finie de ce diaphragme, par diffraction. Comme l'image est à distance finie, il s'agit bien de diffraction dans l'approximation de Fresnel.

Pour reconstruire une image par holographie numérique, il ne faut pas calculer la transformée de Fourier de l'hologramme, mais la transformée de Fresnel qui tient compte de la distance à laquelle on calcule la figure de diffraction.

A partir d'hologrammes ou d'objets microstructurés, on peut donner la forme qu'on veut à un faisceau lumineux par diffraction. Par exemple l'hologramme d'un objet quasi-ponctuel fournit une lentille convergente. On peut aussi réaliser des dispositifs qui réalisent des lignes ou des cercles ou encore des grilles de points. Ces dispositifs peuvent être réalisés en plastique, en verre ou en silicium.

9.2 Faisceau gaussien

L'objectif de ce paragraphe est d'expliquer qu'un faisceau gaussien est dominé par la diffraction.

On peut le comprendre intuitivement, car la décroissance rapide gaussienne de l'intensité en s'écartant du centre du faisceau revient à une limitation latérale de ce faisceau et crée donc de la diffraction.

Le profil d'un faisceau gaussien au niveau du waist peut être réalisé en éclairant par une onde plane en incidence normale un écran dont la transmittance est gaussienne. Il s'avère qu'en calculant l'amplitude de l'onde diffractée par cet écran à la distance z du waist dans l'approximation de Fresnel, on retrouve l'amplitude et la phase du faisceau gaussien à cette position.

La divergence du faisceau à grande distance s'explique alors par la diffraction. Le calcul dans l'approximation de Fresnel redonne exactement sa valeur, ainsi que celle de la largeur du faisceau en fonction de z et de la distance de Rayleigh.