

# Interférence à ondes multiples

## Interféromètre de Fabry-Perot

### Filtres interférentiels

On appelle interférence à ondes multiples l'interférence d'un grand nombre d'ondes cohérentes. On s'intéresse plus particulièrement à la superposition d'ondes issues d'une lame mince dont les faces parallèles sont fortement réfléchissantes. Le dispositif est semblable à celui utilisé pour observer les anneaux d'égalé inclinaison, mais est plus intéressant car les anneaux obtenus sont beaucoup plus fins.

## 1 Interférence des ondes multiples transmises par une lame

Une lame mince d'indice  $n$  et d'épaisseur constante  $e$ , éclairée par une source étendue, donne des franges d'égalé inclinaison à l'infini ou dans le plan focal d'une lentille. Lorsque les facteurs de réflexion en amplitude sur les deux faces de la lame sont proches de 1 en valeur absolue, les ondes transmises ont presque la même amplitude. Il faut alors tenir compte de toutes les ondes transmises pour déterminer la figure d'interférence. Voir figure 1.

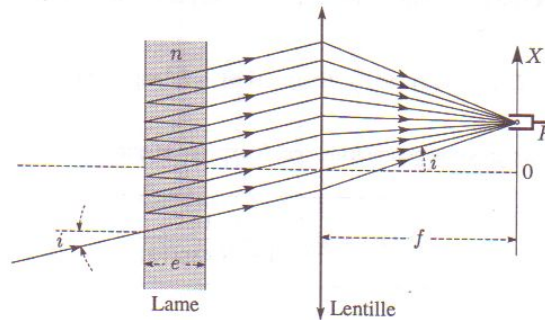


Figure 1: Ondes multiples interférant à la sortie de la lame. Source : J.P. Perez, *Optique géométrique et ondulatoire*

### 1.1 Coefficients de réflexion et de transmission, en amplitude et en intensité

On considère une onde lumineuse d'amplitude complexe  $\psi_i$  incidente sur un dioptré  $n_1 \rightarrow n_2$ . Dans le milieu d'indice  $n_1$ , son intensité est  $I_i = n_1 |\psi_i|^2$ .

Pourquoi  $I$  dépend-elle de l'indice ? Dans l'air, on a  $n = 1$  et on retrouve la formule bien connue  $I = |\psi|^2$ . Si la lumière passe d'un milieu d'indice  $n_1$  à un milieu d'indice  $n_2 > n_1$ , l'énergie lumineuse se propage moins vite dans le deuxième milieu que dans le premier. Pour éviter que de l'énergie lumineuse (de la lumière) s'accumule à la frontière, il faut augmenter l'intensité dans le deuxième milieu. C'est comme si une rivière avec un certain débit passait d'une zone où l'eau se propage à 1 m/s à une zone où elle se propage à 0,5 m/s. Pour éviter que l'eau s'accumule à la frontière, il faut augmenter la taille du lit de la rivière. Comme la vitesse est multipliée par  $n_1/n_2$ , l'intensité est multipliée par  $n_2/n_1$  pour compenser.

Il y a une onde réfléchie dans le premier milieu, d'amplitude  $\psi_r = r\psi_i$ , et d'intensité  $I_r = n_1 |r|^2 |\psi_i|^2 = |r|^2 I_i$ . Dans le deuxième milieu, il y a une onde transmise d'amplitude  $\psi_t = t\psi_i$  et d'intensité  $I_t = n_2 |t|^2 |\psi_i|^2 = \frac{n_2}{n_1} |t|^2 I_i$ .

$r$  et  $t$  sont les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.  $R = |r|^2$  est le coefficient de réflexion en intensité.  $T = \frac{n_2}{n_1} |t|^2$  est le coefficient de transmission en intensité.

En incidence normale, on a

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \text{ et } t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

. On vérifie alors que  $R + T = 1$ , ce qui signifie que l'intensité incidente est égale à la somme des intensités réfléchie et transmise.

## 1.2 Amplitude complexe des ondes transmises

Soient  $r_1$  et  $t_1$  les coefficients de réflexion et de transmission du dioptre air/lame, et  $r_2$  et  $t_2$  ceux du dioptre lame/air. Deux rayons consécutifs transmis par la lame sont déphasés de

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2ne \cos r$$

avec  $r$  l'angle de réfraction dans la lame. Si  $\psi_0$  est l'amplitude de l'onde incidente, la première onde transmise a pour amplitude  $\psi_1 = t_1 t_2 \psi_0$ . La deuxième onde transmise a pour amplitude  $\psi_2 = t_1 r_2^2 t_2 e^{i\phi} \psi_0$ ; la troisième  $\psi_3 = t_1 r_2^4 t_2 e^{2i\phi} \psi_0$ ; la quatrième  $\psi_4 = t_1 r_2^6 t_2 e^{3i\phi} \psi_0$  etc...

Comme  $r_2 = -r_1 = \frac{n-1}{n+1}$ , le coefficient de réflexion en intensité est le même pour les deux dioptres :  $R = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$ . De plus,  $t_1 = 2/(n+1)$  et  $t_2 = 2n/(n+1)$ . Le coefficient de transmission en intensité pour le premier dioptre est  $T_1 = n t_1^2 = 4n/(n+1)^2$ , celui du deuxième dioptre est  $T_2 = \frac{1}{n} t_2^2 = 4n/(n+1)^2$ . On a donc  $T_1 = T_2 \equiv T = t_1 t_2$ .

D'où :  $\psi_1 = T \psi_0$ ,  $\psi_2 = T R e^{i\phi} \psi_0$ ,  $\psi_3 = T R^2 e^{2i\phi} \psi_0$ ,  $\psi_4 = T R^3 e^{3i\phi} \psi_0, \dots, \psi_n = T R^{n-1} e^{(n-1)i\phi} \psi_0 \dots$ . Les amplitudes de ces ondes seront presque égales si  $R$  est proche de 1.

## 1.3 Amplitude complexe de l'onde transmise résultante

L'onde totale transmise est la somme des ondes transmises :

$$\begin{aligned} \psi_t &= \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n + \dots = T \psi_0 + T \psi_0 R e^{i\phi} + \dots + T \psi_0 R^{n-1} e^{(n-1)i\phi} + \dots \\ \psi_t &= T \psi_0 (1 + R e^{i\phi} + R^2 e^{2i\phi} + \dots + R^n e^{ni\phi} + \dots) = T \psi_0 \frac{1}{1 - R e^{i\phi}} \end{aligned}$$

car  $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = 1/(1 - q)$  si  $|q| < 1$ .

## 1.4 Intensité de l'onde transmise totale

$$I_t = \psi_t \psi_t^* \tag{1}$$

$$= I_0 \frac{T^2}{(1 - R e^{i\phi})(1 - R e^{-i\phi})} \tag{2}$$

$$= I_0 \frac{T^2}{1 - R(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + R^2} \tag{3}$$

$$= I_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \phi} \tag{4}$$

$$= I_0 \frac{T^2}{(1 + R^2 - 2R) + 2R(1 - \cos \phi)} \tag{5}$$

$$= I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\phi}{2}} \tag{6}$$

$$= I_0 \frac{1}{1 + M \sin^2 \frac{\phi}{2}} \text{ car } T = 1 - R \text{ avec } M = \frac{4R}{(1 - R)^2} \tag{7}$$

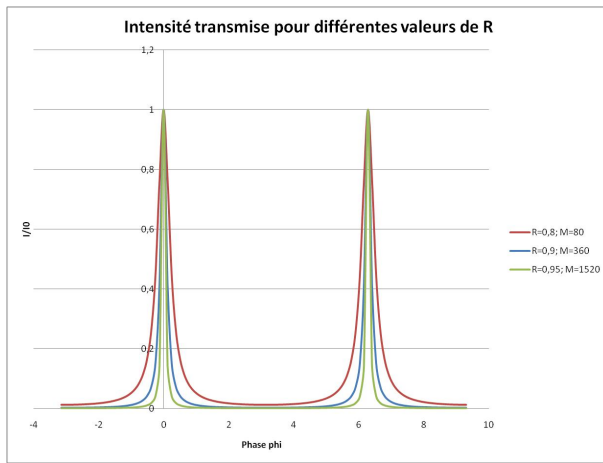


Figure 2: Allure de l'intensité résultante à la sortie d'une lame à faces réfléchissantes. Plus les faces sont réfléchissantes, plus l'intensité est concentrée autour des phases  $\phi = 2k\pi$ ,  $k$  entier.

## 2 Interféromètre de Fabry-Perot

### 2.1 Description

Cet interféromètre est constitué de deux lames de verre dont les faces en regard sont planes (à  $\lambda/20$  près), parallèles et très réfléchissantes. Elles définissent une lame d'air d'épaisseur  $e$  et d'indice  $n \simeq 1,00$ . Les lames de verre sont légèrement prismatiques pour éviter des réflexions parasites.

L'interféromètre est souvent employé dans le montage suivant :

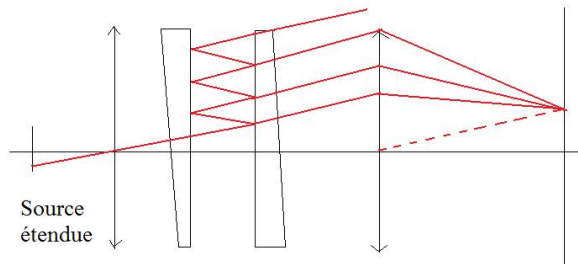


Figure 3: Montage de l'interféromètre de Fabry-Perot. La source est étendue. La première lentille est collimatrice : elle envoie un faisceau faiblement divergent sur la face d'entrée de l'interféromètre. Comme les rayons émergents de l'interféromètre sont parallèles, ils forment des franges localisées à l'infini, que l'on peut projeter dans le plan focal de la deuxième lentille.

### 2.2 Figure d'interférence

On observe des anneaux aux points qui vérifient  $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2e \cos i = 2k\pi$ , c'ad, avec  $\cos i \simeq 1 - i^2/2$ ,  $i^2 = 2 - k\lambda/e$ . Le rayon des anneaux est  $r = f'i = f'\sqrt{2 - k\lambda/e}$ .  $k$  est l'ordre d'interférence.

Exemple :  $f' = 500$  mm,  $e = 10$  mm,  $\lambda = 600$  nm. L'ordre d'interférence au centre est  $k_0 = 2e/\lambda = 33333,3$ . Le premier anneau a  $k_1 = 33333$  et son rayon est  $r_1 = 2,2$  mm. Le deuxième anneau a  $k_2 = 33332$  etc...

Contraste des franges :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

avec

$$I_{max} = I_0 \frac{1}{1+0} = I_0$$

et

$$I_{min} = I_0 \frac{1}{1+M}$$

. On trouve

$$C = \frac{M}{M+2} = \frac{2R}{1+R^2}$$

### 2.3 Finesse des franges

On cherche la largeur à mi-hauteur  $\Delta\phi$  des pics d'intensités de la courbe  $I_t(\phi)$ . On a :  $I_t(\Delta\phi/2) = I_0/2$ , c'ad  $M \sin^2 \frac{\Delta\phi}{4} = 1$ . Or  $M$  est grand, donc le sinus est petit, et  $\Delta\phi/4$  aussi. On utilise  $\sin x = x$  pour  $x$  petit et on trouve :

$$M\Delta\phi^2/16 = 1 \Rightarrow \Delta\phi = 4/\sqrt{M} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

La finesse est par définition  $F = \frac{2\pi}{\Delta\phi} = \pi\sqrt{R}/(1-R)$ . Exemple :  $F = 14$  pour  $R = 0,8$ .  
Interprétation :  $F$  représente le nombre d'ondes qui interfèrent effectivement à la sortie du FP.

## 3 L'interféromètre de Fabry-Perot en spectrométrie

### 3.1 Détermination d'une longueur d'onde

On éclaire le FP avec une onde lumineuse monochromatique. On observe des anneaux. On a vu que le rayon  $r$  de ces anneaux vérifie :

$$r^2 = f'^2(2 - k\lambda/e)$$

, où  $k$  est l'ordre d'interférence de l'anneau.

Le 1er anneau a pour ordre  $k_1$  et vérifie  $r_1^2 = f'^2(2 - (k_1 + 1)\lambda/e) + 1 \times f'^2\lambda/e$ .

Le deuxième anneau a pour ordre  $k_2 = k_1 - 1$  et vérifie  $r_2^2 = f'^2(2 - (k_1 + 1)\lambda/e) + 2 \times f'^2\lambda/e$ .

Le  $N^{\text{ième}}$  anneau vérifie :  $r_N^2 = \text{cste} + Nf'^2\lambda/e$ . Si on représente  $r_N^2$  en fonction de  $N$ , on obtient une droite de pente  $a = f'^2\lambda/e$ . En connaissant  $f'$  et  $e$ , on en déduit  $\lambda$ .

### 3.2 Pouvoir de résolution du Fabry-Perot

Deux longueurs d'ondes voisines possèdent deux phases différentes, et auront des anneaux différents. On peut résoudre ces deux longueurs d'onde si on peut distinguer les deux systèmes d'anneaux, c'ad si la différence de phase entre elles est plus petite que la largeur à mi-hauteur d'un anneau. La limite est atteinte pour

$$\Delta\phi = 2\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\delta$$

, soit

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\delta$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde moyenne. Comme l'ordre d'interférence est  $k = \delta/\lambda$  et la finesse  $F = \frac{2\pi}{\Delta\phi}$ , on trouve le pouvoir de résolution

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kF$$

et la plus petite différence de longueur d'onde mesurable est  $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{kF}$ .

Exemple :  $F = 14$ ,  $k = 33333$ ,  $\lambda = 600$  nm. Pouvoir de résolution :  $4,7 \cdot 10^5$ .  $\Delta\lambda = 1,3$  pm.

### 3.3 Mesure de la différence entre deux longueurs d'onde

On s'intéresse à un doublet (le jaune du sodium par exemple, voir TP). Chacune des longueurs d'onde a son propre système d'anneaux. Pour certaines valeurs de  $e$ , ils coïncident (coïncidence), pour d'autres valeurs, l'un est brillant là où l'autre est sombre (anticoïncidence). Les anticoïncidences se caractérisent par un contraste minimal.

Plaçons nous à une anticoïncidence : la raie de longueur d'onde  $\lambda_1$  a pour ordre d'interférence au centre  $2e/\lambda_1 = p_1$ . Celle de longueur d'onde  $\lambda_2$  a pour ordre d'interférence  $2e/\lambda_2 = p_1 + 1/2 + m$  où  $m$  est entier. Lorsqu'on augmente  $e$  de  $\Delta e$  pour atteindre la prochaine anticoïncidence, on augmente  $p_1$  jusqu'à  $p'_1$ , et  $m$  d'une unité :

$$\frac{2(e + \Delta e)}{\lambda_1} = p'_1; \quad \frac{2(e + \Delta e)}{\lambda_2} = p'_1 + \frac{1}{2} + m + 1$$

. On en déduit :

$$|\lambda_1 - \lambda_2| = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\Delta e}$$

. Or  $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq \lambda$ . Donc  $\Delta\lambda = \lambda^2/(2\Delta e)$ .

## 4 Filtres interférentiels

Un filtre interférentiel est constitué d'une lame transparente d'indice  $n$  et d'épaisseur  $e$  du même ordre de grandeur que la longueur d'onde qu'il laisse passer. Cette lame est entourée de deux couches fortement réfléchissantes. Il s'agit donc d'un interféromètre de Fabry-Perot de faible épaisseur et avec un indice  $n \neq 1$ .

Eclairé en incidence normale, un tel filtre laisse passer toutes les longueurs d'ondes telles que

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2ne = m2\pi$$

avec  $m$  entier. On a donc

$$\lambda = \frac{2ne}{m}.$$

On choisit généralement  $m = 1$  afin que les longueurs d'onde correspondant à  $m = 2, 3 \dots$  soient en dehors du spectre visible.

Exemple : lame de cryolithe, d'indice  $n = 1,365$  et d'épaisseur  $e = 0,5$   $\mu\text{m}$ . Les longueurs d'onde passantes sont :  $1,365$   $\mu\text{m}$ ,  $0,6825$   $\mu\text{m}$ ,  $0,455$   $\mu\text{m}$ ,  $0,341$   $\mu\text{m}$ . Il y a deux longueurs d'onde passantes dans le visible. Pour n'en laisser qu'une, il faut diminuer l'épaisseur : avec  $e = 0,25$   $\mu\text{m}$ , on trouve pour longueurs d'onde passantes  $0,6825$   $\mu\text{m}$ ,  $0,341$   $\mu\text{m}$  etc...

La bande passante  $\Delta\lambda$  du filtre autour de la longueur d'onde  $\lambda$  est donnée par la largeur à mi-hauteur du pic de transmission de la cavité Fabry-Perot. Le calcul est analogue à celui du pouvoir de résolution de l'interféromètre. On trouve :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{mF}.$$

Exemple : pour un coefficient de réflexion en intensité  $R = 0,95$ , on a une finesse  $F = 61$ . Pour le filtre de l'exemple précédent, on a  $m = 1$  et  $\lambda = 682,5$  nm. Cela donne :  $\Delta\lambda = 11,2$  nm.

## 5 Cavités résonnantes Fabry-Perot

Les lasers comportent en général deux composants essentiels : un milieu amplificateur de lumière et une cavité. Les cavités les plus courantes sont des Fabry-Perot plans ou sphériques.

### 5.1 Modes longitudinaux d'une cavité Fabry-Perot

On considère un Fabry-Perot constitué de deux miroirs plans parallèles, entre lesquels se trouve un milieu d'indice  $n$ , et une onde sinusoïdale se propageant suivant la normale aux miroirs. Cette onde effectue de nombreux allers-retours entre les miroirs et interfère avec elle-même. Les interférences sont constructives si  $2ne = k\lambda$  : c'est la condition de résonance de la cavité. Les ondes qui ne vérifient pas cette condition sont éliminées de la cavité par interférences destructives.

En utilisant  $\lambda = c/\nu$ , la condition de résonance se réécrit

$$\nu = k \frac{c}{2ne}.$$

Ce sont les fréquences de résonance de la cavité. L'intervalle de fréquence entre deux fréquences de résonance est appelé intervalle spectral libre et vaut  $c/(2ne)$ .

La largeur en fréquence d'un mode dépend de la finesse de la cavité.

### 5.2 Cavité Fabry-Perot sphérique

Considérer le Fabry-Perot comme une cavité n'est justifié en toute rigueur que si les ondes concernées sont planes, c'est-à-dire illimitées latéralement. Or les ondes qui se propagent dans le Fabry-Perot sont limitées latéralement par la taille finie des miroirs. Du fait de la diffraction, l'onde réfléchi par l'un des miroirs s'étale en se propageant, et une partie n'atteint pas le deuxième miroir : il y a des pertes.

Pour limiter cet inconvénient, on remplace les miroirs plans par des miroirs sphériques. Les ondes gaussiennes remplacent alors les ondes planes. Le problème de la taille limitée des miroirs est beaucoup moins critique car l'amplitude de l'onde gaussienne décroît rapidement avec la distance à l'axe. Les pertes sont donc nettement moindres.

Une configuration symétrique particulière des miroirs est souvent utilisée : la configuration confocale. Les deux miroirs sont sphériques, de même rayon de courbure, et le centre de chacun est la sommet de l'autre. Les deux foyers sont confondus au centre de la cavité.

Une configuration non-symétrique est la configuration plan-sphérique.