Interférence à ondes multiples
Interféromètre de Fabry-Perot
Filtres interférentiels

On appelle interférence à ondes multiples l'interférence d'un grand nombre d'ondes cohérentes. On s'intéresse plus particulièrement à la superposition d'ondes issues d'une lame mince dont les faces parallèles sont fortement réfléchissantes. Le dispositif est semblable à celui utilisé pour observer les anneaux d'égale inclinaison, mais est plus intéressant car les anneaux obtenus sont beaucoup plus fins.

1 Interférence des ondes multiples transmises par une lame

Une lame mince d'indice n et d'épaisseur constante e, éclairée par une source étendue, donne des franges d'égale inclinaison à l'infini ou dans le plan focal image d'une lentille. Lorsque les facteurs de réflexion en amplitude sur les deux faces de la lame sont proches de 1 en valeur absolue, les ondes transmises ont presque la même amplitude. Il faut alors tenir compte de toutes les ondes transmises pour déterminer la figure d'interférence. Voir figure 1.

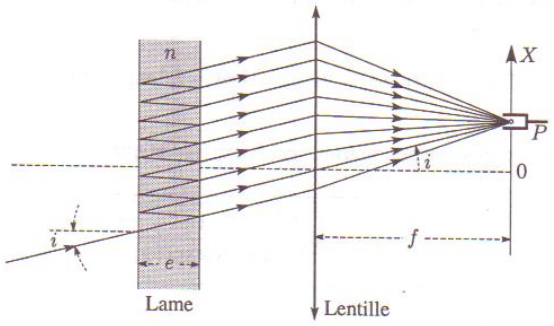

Figure 1: Ondes multiples interférant à la sortie de la lame. Source : J.P. Perez, *Optique géométrique et ondulatoire*

1.1 Coefficients de réflexion et de transmission, en amplitude et en intensité

On considère une onde lumineuse d'amplitude complexe ψ_i incidente sur un dioptre $n_1 \to n_2$. Dans le milieu d'indice n_1, son intensité est $I_i = n_1|\psi_i|^2$.
Pourquoi I dépend-elle de l'indice ? Dans l'air, on a $n = 1$ et on retrouve la formule bien connue $I = |\psi|^2$. Si la lumière passe d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice $n_2 > n_1$, l'énergie lumineuse se propage moins vite dans le deuxième milieu que dans le premier. Pour éviter que de l'énergie lumineuse (de la lumière) s'accumule à la frontière, il faut augmenter l'intensité dans le deuxième milieu. C'est comme si une rivière avec un certain débit passait d'une zone où l'eau se propage à 1 m/s à une zone où elle se propage à 0,5 m/s. Pour éviter que l'eau s'accumule à la frontière, il faut augmenter la taille du lit de la rivière. Comme la vitesse est multipliée par n_1/n_2, l'intensité est multipliée par n_2/n_1 pour compenser.
Il y a une onde réfléchie dans le premier milieu, d'amplitude $\psi_r = r\psi_i$, et d'intensité $I_r = n_1|r|^2|\psi_i|^2 = |r|^2 I_i$. Dans le deuxième milieu, il y a une onde transmise d'amplitude $\psi_t = t\psi_i$ et d'intensité $I_t = n_2|t|^2|\psi_i|^2 = \frac{n_2}{n_1}|t|^2 I_i$.
r et t sont les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude. $R = |r|^2$ est le coefficient de réflexion en intensité. $T = \frac{n_2}{n_1}|t|^2$ est le coefficient de transmission en intensité.
En incidence normale, on a

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \text{ et } t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

. On vérifie alors que $R + T = 1$, ce qui signifie que l'intensité incidente est égale à la somme des intensités réfléchie et transmise. Si les dioptres présentent une absorption A, on a plus généralement $R + T + A = 1$.

1.2 Différence de marche et de phase entre deux rayons transmis consécutifs

1.3 Intensité de l'onde transmise totale

$$I = I_0 \frac{1}{1 + M \sin^2 \frac{\phi}{2}} \text{ avec } M = \frac{4R}{(1-R)^2} \tag{1}$$

où I_0 est l'intensité de l'onde incidente.

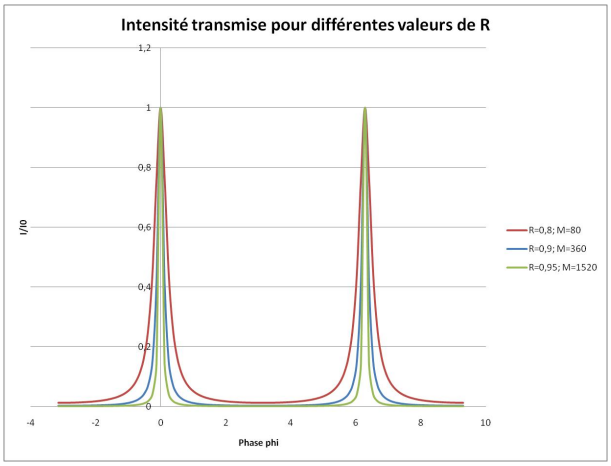

Figure 2: Allure de l'intensité résultante à la sortie d'une lame à faces réfléchissantes. Plus les faces sont réfléchissantes, plus l'intensité est concentrée autour des phases $\phi = 2k\pi$, k entier.

2 Interféromètre de Fabry-Perot

2.1 Description

Cet interféromètre est constitué de deux lames de verre dont les faces en regard sont planes (à $\lambda/20$ près), parallèles et très réfléchissantes. Elles définissent une lame d'air d'épaisseur e et d'indice $n \simeq 1,00$. Les lames de verre sont légèrement prismatiques pour éviter des réflexions parasites.
L'interféromètre est souvent employé dans le montage suivant :

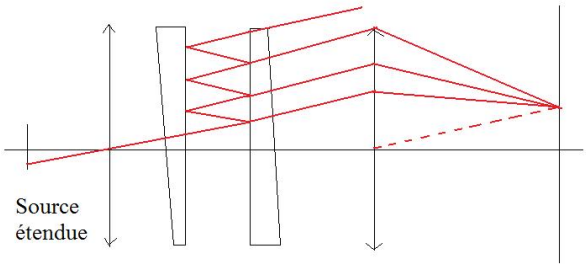

Figure 3: Montage de l'interféromètre de Fabry-Perot. La source est étendue. La première lentille est collimatrice : elle envoie un faisceau faiblement divergent sur la face d'entrée de l'interféromètre. Comme les rayons émergents de l'interféromètre sont parallèles, ils forment des franges localisées à l'infini, que l'on peut projeter dans le plan focal image de la deuxième lentille.

2.2 Figure d'interférence

On observe des anneaux aux points qui vérifient $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2e \cos i = 2k\pi$, càd, avec $\cos i \simeq 1 - i^2/2$, $i^2 = 2 - k\lambda/e$.
Le rayon des anneaux est $r = f'i = f'\sqrt{2 - k\lambda/e}$. k est l'ordre d'interférence.
Exemple : $f' = 500$ mm, $e = 10$ mm, $\lambda = 600$ nm. L'ordre d'interférence au centre est $k_0 = 2e/\lambda = 33333,3$.
Le premier anneau a $k_1 = 33333$ et son rayon est $r_1 = 2,2$ mm. Le deuxième anneau a $k_2 = 33332$ etc...
Contraste des franges :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

avec

$$I_{max} = I_0 \frac{1}{1 + 0} = I_0$$

et

$$I_{min} = I_0 \frac{1}{1+M}$$

. On trouve

$$C = \frac{M}{M+2} = \frac{2R}{1+R^2}$$

.

2.3 Finesse des franges

On cherche la largeur à mi-hauteur $\Delta\phi$ des pics d'intensité de la courbe $I(\phi)$. On a : $I(\Delta\phi/2) = I_0/2$, càd $M \sin^2 \frac{\Delta\phi}{4} = 1$. Or M est grand, donc le sinus est petit, et $\Delta\phi/4$ aussi. On utilise $\sin x = x$ pour x petit et on trouve :

$$M\Delta\phi^2/16 = 1 \Rightarrow \Delta\phi = 4/\sqrt{M} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

La finesse est par définition $F = \frac{2\pi}{\Delta\phi} = \pi\sqrt{R}/(1-R)$. Exemple : $F = 14$ pour $R = 0,8$. Interprétation : F représente le nombre d'ondes qui interfèrent effectivement à la sortie du FP.

3 L'interféromètre de Fabry-Perot en spectrométrie

3.1 Détermination d'une longueur d'onde

On éclaire le FP avec une onde lumineuse monochromatique. On observe des anneaux. On a vu que le rayon r de ces anneaux vérifie :

$$r^2 = f'^2(2 - k\lambda/e)$$

, où k est l'ordre d'interférence de l'anneau.
Comme k dépend du numéro N de l'anneau, le $N^{\text{ième}}$ anneau vérifie : $r_N^2 = \text{cste} + Nf'^2\lambda/e$. Si on représente r_N^2 en fonction de N, on obtient une droite de pente $a = f'^2\lambda/e$. En connaissant f' et e, on en déduit λ.

3.2 Pouvoir de résolution du Fabry-Perot

Deux longueurs d'ondes voisines possèdent deux phases différentes, et auront des anneaux différents. On peut résoudre ces deux longueurs d'onde si on peut distinguer les deux systèmes d'anneaux, càd si la différence de phase entre elles est plus grande que la largeur à mi-hauteur d'un anneau. La limite est atteinte pour

$$\Delta\phi = 2\pi(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2})\delta$$

, soit

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\delta$$

où λ est la longueur d'onde moyenne. Comme l'ordre d'interférence est $k = \delta/\lambda$ et la finesse $F = \frac{2\pi}{\Delta\phi}$, on trouve le pouvoir de résolution

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kF$$

et la plus petite différence de longueur d'onde mesurable est $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{kF}$.
Exemple : $F = 14$, $k = 33333$, $\lambda = 600$ nm. Pouvoir de résolution : $4{,}7 \cdot 10^5$. $\Delta\lambda = 1,3$ pm.

4 Filtres interférentiels

Un filtre interférentiel est constitué d'une lame transparente d'indice n et d'épaisseur e du même ordre de grandeur que la longueur d'onde qu'il laisse passer. Cette lame est entourée de deux couches fortement réfléchissantes. Il s'agit donc d'un interféromètre de Fabry-Perot de faible épaisseur et avec un indice $n \neq 1$. Eclairé en incidence normale, un tel filtre laisse passer toutes les longueurs d'ondes telles que

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2ne = k2\pi$$

avec k entier. On a donc

$$\lambda = \frac{2ne}{k}.$$

On choisit généralement $k = 1$ afin que les longueurs d'onde correspondant à $k = 2; 3 \ldots$ soient en dehors du spectre visible.
Exemple : lame de cryolithe, d'indice $n = 1,365$ et d'épaisseur $e = 0,25$ μm.

La bande passante $\Delta\lambda$ du filtre autour de la longueur d'onde λ est donnée par la largeur à mi-hauteur du pic de transmission de la cavité Fabry-Perot. Le calcul est analogue à celui du pouvoir de résolution de l'interféromètre. On trouve :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{kF}.$$

Exemple : pour un coefficient de réflexion en intensité $R = 0,95$, on a une finesse $F = 61$. Pour le filtre de l'exemple précédent, on a $k = 1$ et $\lambda = 682,5$ nm. Cela donne : $\Delta\lambda =$
.

5 Cavités résonnantes Fabry-Perot

Les lasers comportent en général deux composants essentiels : un milieu amplificateur de lumière et une cavité. Les cavités les plus courantes sont des Fabry-Perot plans ou sphériques.

5.1 Modes longitudinaux d'une cavité Fabry-Perot

On considère un Fabry-Perot constitué de deux miroirs plans parallèles, entre lesquels se trouve un milieu d'indice n, et une onde sinusoïdale se propageant suivant la normale aux miroirs. Cette onde effectue de nombreux allers-retours entre les miroirs et interfère avec elle-même. Les interférences sont constructives si $2ne = k\lambda$, k entier : c'est la condition de résonance de la cavité. Les ondes qui ne vérifient pas cette condition sont éliminées de la cavité par interférences destructives.

5.1.1 Fréquence des modes et intervalle spectral libre

La largeur en fréquence d'un mode dépend de la finesse de la cavité.

5.2 Cavité Fabry-Perot sphérique

Considérer le Fabry-Perot comme une cavité n'est justifié en toute rigueur que si les ondes concernées sont planes, càd illimitées latéralement. Or les ondes qui se propagent dans le Fabry-Perot sont limitées latéralement par la taille finie des miroirs. Du fait de la diffraction, l'onde réfléchie par l'un des miroirs s'étale en se propageant, et une partie n'atteint pas le deuxième miroir : il y a des pertes.

Pour limiter cet inconvénient, on remplace les miroirs plans par des miroirs sphériques. Les ondes gaussiennes remplacent alors les ondes planes. Le problème de la taille limitée des miroirs est beaucoup moins critique car l'amplitude de l'onde gaussienne décroit rapidement avec la distance à l'axe. Les pertes sont donc nettement moindres.