Correction du devoir du 08/01/2010

Exercice 1

1. $\psi(x,t) = A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t + \phi)$

2. Représentation complexe : $\underline{\psi}(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t+\phi)}$
   Amplitude complexe : $\underline{A} = Ae^{i(kx+\phi)}$.

3. Intensité $I = \underline{AA}^* = A^2$.

4. $v = c/n$

5. $v = \omega/k$. Or $v = c/n$ et $k = 2\pi/\lambda$, donc $c/n = \omega\lambda/(2\pi)$.

6. De la question précédente, on déduit $\omega = (2\pi c)/(n\lambda)$. Or on a $\omega = (2\pi c)/\lambda_0$. Donc $n\lambda = \lambda_0$ et $\lambda = \lambda_0/n$.

7. Les limites en longueur d'onde du domaine visible sont 400 nm - 750 nm.

8. C'est le champ électrique qui est utilisé pour représenter l'onde lumineuse, car c'est sous son action que les détecteurs de lumière fonctionnent ou que la lumière interagit avec la matière. Les effets du champ magnétique sont beaucoup plus faibles.

Exercice 2

1. $\underline{\psi} = \underline{\psi}_1 + \underline{\psi}_2 = a + be^{i\phi}$.

2.

$$
\begin{aligned}
I &= \underline{\psi\psi}^* && (1)\\
&= (a+be^{i\phi})(a+be^{-i\phi}) && (2)\\
&= a^2 + ab(e^{i\phi}+e^{-i\phi}) + b^2e^{i\phi}e^{-i\phi} && (3)\\
I &= a^2 + 2ab\cos\phi + b^2 && (4)
\end{aligned}
$$

Exercice 3

1. $n_B = 1,530$; $n_R = 1,511$.

2. $v_B = c/n_B = 1,96 \cdot 10^8$ m/s et $v_R = c/n_R = 1,99 \cdot 10^8$ m/s.

3. $v = L/t$, donc $t = L/v$. $t_B = L/v_B = 5,10 \cdot 10^{-7}$ s. $t_R = L/v_R = 5,03 \cdot 10^{-7}$ s. La différence de temps de parcours est $\Delta t = |t_B - t_R| = 7 \cdot 10^{-9}$ s.

4. Le sommet de l'impulsion se déplace à la vitesse de groupe v_g.

5.

$$
\begin{aligned}
v_g &= \frac{d\omega}{dk} && (5)\\
&= c/n + ck\frac{d(1/n)}{dk} && (6)\\
&= c/n + ck\frac{-1}{n^2}\frac{dn}{dk} && (7)\\
\frac{d\omega}{dk} &= c/n - (ck/n)\frac{1}{n}\frac{dn}{d\omega}\frac{d\omega}{dk} && (8)
\end{aligned}
$$

$$\frac{d\omega}{dk}(1 + (ck/n)\frac{1}{n}\frac{dn}{d\omega}) = c/n \qquad (9)$$

$$\frac{d\omega}{dk}(n + (ck/n)\frac{dn}{d\omega}) = c \qquad (10)$$

$$\frac{d\omega}{dk}(n + \omega(2B\omega)) = c \qquad (11)$$

$$\frac{d\omega}{dk} = c/(A + 3B\omega^2) \qquad (12)$$

6. $v_g = 1,92 \cdot 10^8$ m/s.

7. La vitesse du sommet de l'impulsion est plus lente que celle de la composante bleue, qui est a priori la couleur qui se propage le moins vite. Or le sommet de l'impulsion devrait se trouver au milieu des ondes qui arrivent. On ne peut donc pas dire que dans l'impulsion, chaque couleur se comporte indépendamment des autres.

Exercice 4

1. $\psi_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$

2. $\psi(x,t) = \psi_1 + \psi_2 = A(\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t))$. En utilisant la formule rappelée en début d'énoncé, on trouve $\psi(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(-\omega t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$ car la fonction cosinus est paire.

3. Cette onde est de la forme f(x)g(t), donc il s'agit d'une onde stationnaire.

4. Voir cours

5. Les noeuds sont les points d'amplitude nulle. Les ventres sont les points d'amplitude maximale.

6. En un noeud, $\psi(x,t) = 0$ pour tout t. Donc $\cos(kx_N) = 0$, c'est à dire $kx_N = \pi/2 + p\pi$ avec p entier. On a donc $x_N/\lambda = 1/4 + p/2$ (car $k = 2\pi/\lambda$), soit $x_N = \lambda/4 + p\lambda/2$. Deux noeuds successifs sont distants de $\lambda/2$.