Généralités sur les ondes

1 Notion d'onde

Définition simple : Une onde est une *perturbation* qui se propage.
Exemples : vagues à la surface de l'eau (perturbation de la hauteur moyenne de la surface); le son (perturbation de la pression de l'air); la lumière (perturbation du champ électromagnétique).
La figure 1 montre la propagation d'une onde le long d'une corde. On s'aperçoit qu'il n'y

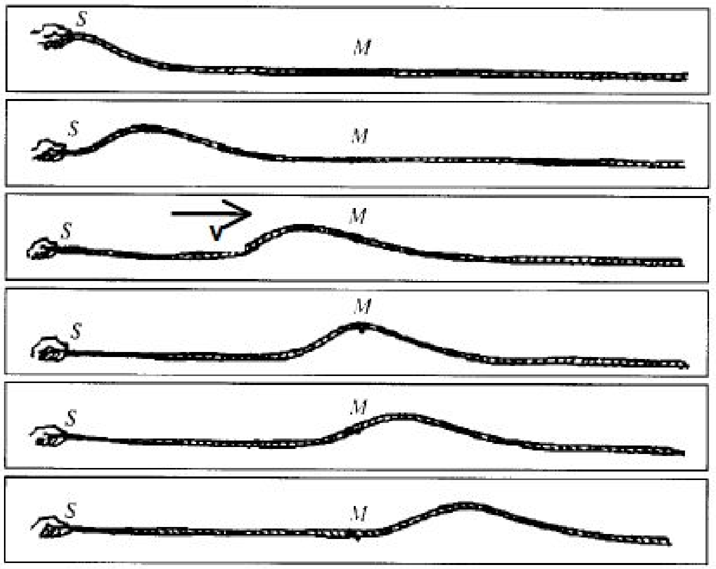

Figure 1: Exemple d'une onde se propageant le long d'une corde. La perturbation est la hauteur de la corde. Celle-ci se déplace vers la droite, sans déformation. Le point M occupe la même position avant et après le passage de l'onde : il n'y a pas de mouvement horizontal de la corde. La hauteur de l'onde est maximale à l'instant $t = 0$ pour une abscisse $x = 0$. Si l'onde se propage à la vitesse v, l'onde sera maximale à l'instant t au point d'abscisse $x = vt$. La hauteur de la corde, qui dépend de x et de t, peut donc s'écrire $y(x, t) = f(vt - x)$.

a pas de déplacement global de la corde (un point M occupe la même place avant et après le passage de l'onde). D'autre part, si l'onde se propage sans déformation, on peut l'écrire sous la forme $f(vt - x)$ car à l'instant t, autour du point $x = vt$, elle aura la même forme qu'à l'instant $t = 0$ autour de $x = 0$. Si l'onde se propageait vers la gauche, elle aurait la forme $f(vt + x)$ car les x seraient négatifs. Les ondes de la forme $f(vt \mp x)$ sont appelées *ondes progressives* car elles se déplacent.
Toutes les ondes peuvent s'écrire comme une somme de fonctions du type $\cos(\omega t \mp kx - \phi)$ où ϕ est une phase. On va donc s'intéresser aux ondes qui prennent cette forme particulièrement simple, et qu'on nomme oscillateurs sinusoïdaux.

2 Oscillateurs sinusoïdaux

2.1 Généralités

On se place à la position x à l'instant t : une onde sinusoïdale se propageant vers les x croissants s'écrit

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx - \phi) \tag{1}$$

avec

A	Amplitude de l'onde. Son unité dépend de la grandeur physique qui se propage
ω	Pulsation de l'onde, en rad/s. Elle est reliée à la fréquence f (en Hz) par $\omega = 2\pi f$ et à la période T (en s) par $\omega = 2\pi/T$.
k	C'est la valeur du vecteur d'onde $\vec{k}$, qui est dirigé selon la direction de propagation et de même sens que celui de propagation. Elle s'exprime en m^{-1} et est reliée à la longueur d'onde λ (en m) par $k = 2\pi/\lambda$.
ϕ	C'est la phase à l'origine (en x=0 à t=0), en radians.

Exemple : $y(x,t) = 3\cos(2\pi \times 10t - (2\pi/5)x - \pi/4)$.

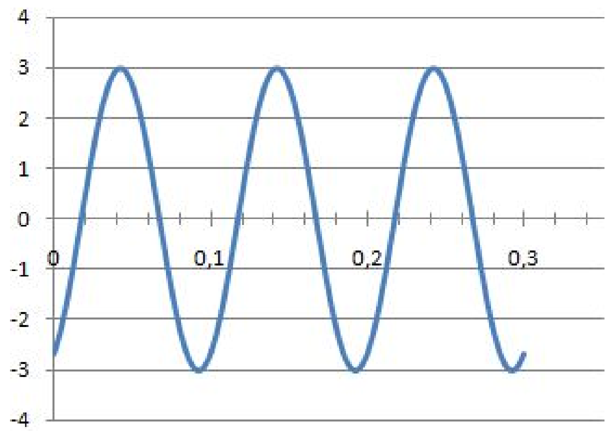

Figure 2: Evolution de $y(x,t)$ au point $x = 6,5$ en fonction du temps en secondes. On constate qu'en un point donné, la hauteur de l'onde varie au cours du temps en oscillant. La période est égale ici à $T = 0,1$ s

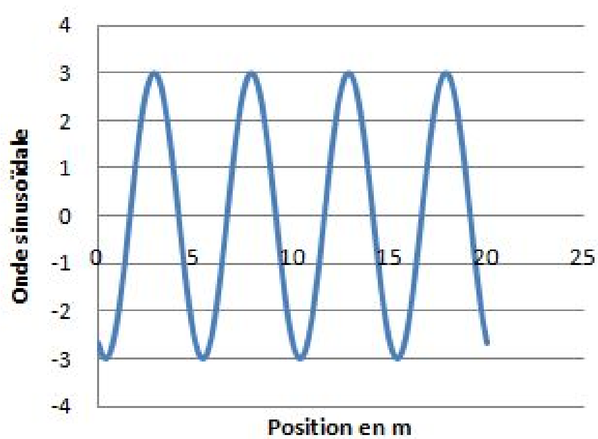

Figure 3: Evolution de $y(x,t)$ à l'instant $t = 0,37$ s en fonction de la position x en m. On constate qu'à un instant donné, la hauteur de l'onde varie dans l'espace en oscillant. Elle se répète à l'identique tous les 5 m.

Remarques :

- une onde se propageant dans le sens des x décroissants aurait la forme $y(x,t) = A\cos(\omega t + kx - \phi)$: c'est comme si on changeait k en $-k$ ou x en $-x$.
- En réécrivant $y(x,t) = A\cos(k(\frac{\omega}{k}t - x) - \phi)$, on voit que ω/k est égal à la vitesse v de l'onde sinusoïdale. C'est à dire

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

2.2 Représentation complexe d'une onde sinusoïdale

L'utilisation de nombres complexes pour représenter une onde facilite grandement tout calcul, notamment celui de la superposition (addition) de deux ondes. Il s'agit d'une astuce mathématique qui sera très utilisée dans la suite du cours et qui doit être considérée comme essentielle.

2.2.1 Rappels sur les nombres complexes

Un nombre complexe est de la forme $\underline{z} = a + ib$, où a et b sont réels et i un nombre tel que $i^2 = -1$. a et b sont appelés respectivement partie réelle et partie imaginaire de $\underline{z}$.
On peut aussi écrire $\underline{z} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$. Dans la dernière égalité, on a utilisé la notation exponentielle complexe qui sera particulièrement utile. ρ est le module et θ l'argument. Ils sont liés à a et b par : $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\theta = \text{ATAN2}(a; b)$. Réciproquement, $a = \rho\cos\theta$ et $b = \rho\sin\theta$.
Le complexe conjugué $\underline{z}^*$ de $\underline{z}$ est $\underline{z}^* = a - ib = \rho e^{-i\theta}$. Le module carré de $\underline{z}$ est $\rho^2 = |\underline{z}|^2 = \underline{z}\underline{z}^*$
Enfin, on a $\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$.

2.2.2 Amplitude complexe d'une onde sinusoïdale

L'onde $\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx - \phi)$ est la partie réelle de $\underline{\psi}(x,t) = Ae^{ikx}e^{i\phi}e^{-i\omega t} = \underline{A}e^{-i\omega t}$ avec

$$\underline{A} = Ae^{ikx}e^{i\phi} = Ae^{i(kx+\phi)}$$

l'amplitude complexe de l'onde.
L'intérêt de cette grandeur, comme on le verra par la suite, est que son module au carré est proportionnel à l'intensité de l'onde. Si on superpose (additionne) deux ondes de même pulsation, il est généralement plus simple d'additionner leur amplitudes complexes, que d'additionner les $\cos(\omega t - kx + \phi)$.

3 Propagation d'une onde

3.1 Propagation à une dimension

Cette partie concerne les ondes se propageant dans une direction donnée, et ne variant que selon cette direction. Exemples : onde le long d'une corde, vagues à la surface de la mer (bien que la surface de la mer possède deux dimensions, les vagues vont dans une seule direction et ne varient que selon celle-ci).

3.1.1 Equation de propagation

On a vu dans l'exercice 3 du chapitre 1 que l'onde sinusoïdale $\psi(x,t) = A\sin(\omega(t - x/v))$ vérifie l'équation de d'Alembert, appelée aussi équation d'onde car elle est vérifiée par de très nombreuses ondes :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Cette équation est également vérifiée par les oscillateurs sinusoïdaux avec $v = \omega/k$. On peut aussi montrer que la forme complexe $\underline{\psi}$ vérifie aussi cette équation.
De manière générale, toute fonction de la forme $y(x,t) = f(vt - x) + g(vt + x)$ est solution de cette équation, c'est à dire une superposition d'une onde f se propageant vers les x croissants et d'une onde g se propageant vers les x décroissants. Ces fonctions f et g peuvent s'écrire comme sommes d'ondes sinusoïdales.

3.1.2 Périodicité temporelle, périodicité spatiale

On cherche la durée minimale T telle que $\psi(x,t+T) = \psi(x,t)$, ainsi que la distance minimale λ telle que $\psi(x+\lambda,t) = \psi(x,t)$.
Les ondes sinusoïdales sont périodiques dans le temps : période $T = 2\pi/\omega$, et dans l'espace : période $\lambda = 2\pi/k$ appelée longueur d'onde.
En un point donné, T est la durée d'un aller-retour complet de la perturbation.
A un instant donné, λ est la distance entre deux crêtes ou entre deux creux des oscillations.

3.2 Propagation à trois dimensions

On se place dans un milieu *isotrope*, c'est à dire qui se comporte de la même façon quelque soit la direction de l'onde. Dans un espace à trois dimensions (comme celui dans lequel nous évoluons), il se peut que l'onde dépende des trois coordonnées d'espace (en plus du temps) : elle s'écrit alors $\psi(x,y,z,t) = \psi(\vec{r},t)$ si $\vec{r}$ est le vecteur position de coordonnées (x,y,z).

3.2.1 Surfaces d'ondes

Une surface d'onde est un ensemble de points d'égale perturbation, où l'onde prend la même valeur.
Si la source S de l'onde est ponctuelle, cette onde est la même quelle que soit la direction

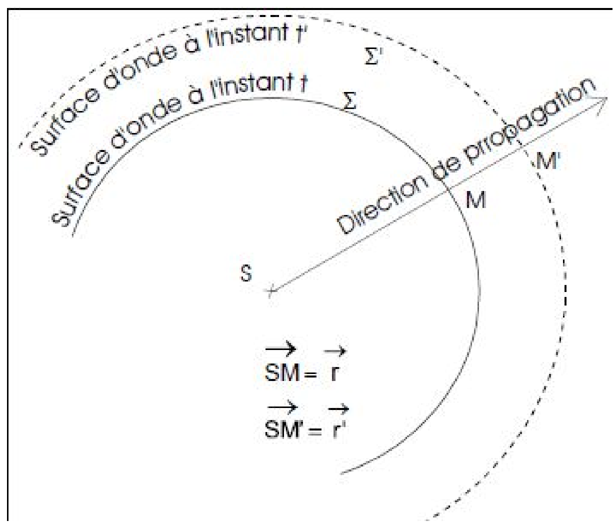

Figure 4: Surfaces d'onde d'une onde sphérique de source S.

dans laquelle on regarde depuis S. Les surfaces d'onde sont donc des sphères car l'onde au point $\vec{r}$ (origine en S) ne dépend que de la distance r à la source, pas de la direction (voir figure 4). On admet qu'une onde sphérique émise par une source ponctuelle S est de la forme :

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{A}{r} f(\omega t - kr); \quad \text{On choisit souvent } f = \cos \text{ et alors } \underline{\psi}(\vec{r},t) = \frac{A}{r} e^{ikr} e^{-i\omega t}$$

Principe d'Huygens : Si on connait la surface d'onde $\Sigma(t)$ à l'instant t, on en déduit la surface d'onde $\Sigma(t+dt)$ à l'instant ultérieur $t+dt$ de la manière suivante : chaque point de $\Sigma(t)$ se comporte comme une source ponctuelle émettant une onde sphérique. $\Sigma(t+dt)$ est la surface enveloppe de ces ondes sphériques. Voir figure 5.
Remarque : les ondes sphériques envisagées ici sont dites divergentes, car elles s'éloignent de la source. Il existe des ondes sphériques convergentes, qui se dirigent vers S, de forme

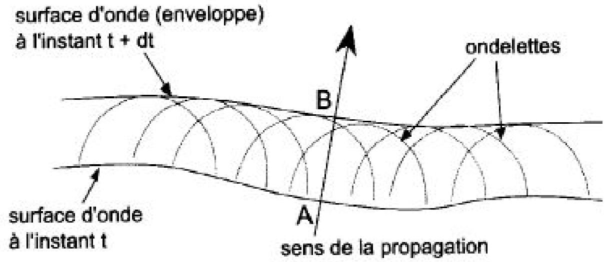

Figure 5: L'onde se propage de proche en proche. Chaque point d'une surface d'onde se comporte comme une source ponctuelle émettant une onde sphérique. La surface d'onde à un instant ultérieur est l'enveloppe des ondes sphériques.

$\frac{A}{r}g(\omega t+kr)$. Comme pour les oscillateurs sinusoïdaux, c'est le signe devant kr qui détermine le sens de propagation.

3.2.2 Ondes planes

Une onde plane est une onde dont les surfaces d'onde sont des plans. Soit $\vec{r}(x, y, z)$ le vecteur position d'un point M appartenant à un de ces plans, d'équation $ax + by + cz =$ constante. Ce plan est perpendiculaire au vecteur $\vec{k}(a, b, c)$ et vérifie $\vec{k} \cdot \vec{r} =$ constante. Si l'onde ne dépend de $\vec{r}$ que par le terme $\vec{k} \cdot \vec{r}$, alors elle est plane :

$$\psi(\vec{r}, t) = f(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + g(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Le vecteur $\vec{k}$ est appelé vecteur d'onde. Il pointe dans la direction et le sens de propagation de l'onde et est perpendiculaire aux surfaces d'ondes. Sa norme est $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$.

Une onde plane sinusoïdale est de la forme $\psi(\vec{r}, t) = A\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi)$, et sa représentation complexe est $\underline{\psi}(\vec{r}, t) = Ae^{i(\phi + \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$.