Chapitre 1 : fonctions dérivées et incertitudes

I/ Variation d'une fonction f(x) dépendant d'une seule variable réelle x

Si x augmente de Δx, la fonction f varie de $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. Le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ est le coefficient directeur (aussi appelé pente) de la droite joignant les points M($x; f(x)$) et N ($x + \Delta x; f(x + \Delta x)$) et vaut $\tan \beta$ (voir figure ci-dessous).

Lorsque Δx tend vers 0, on le note dx, et la variation correspondante de la fonction f est notée df. On a alors : $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$ = nombre dérivé de f en x. Cette notation pour la dérivée est très utilisée par les physiciens et les ingénieurs. Le nombre dérivé est la pente de la tangente à la courbe de f(x) en x et vaut $\tan \alpha$. $df = f^{'}(x)dx$ est appelée différentielle de f.

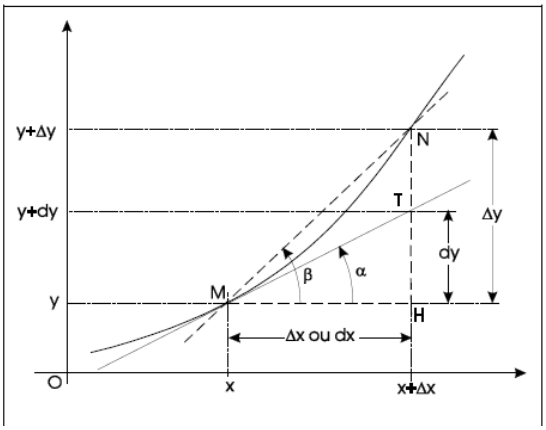

Figure 1 : Représentation graphique du nombre dérivé d'une fonction en un point. Il s'agit de la pente de la tangente à la courbe en ce point.

II/ Lien entre dérivée d'une fonction et incertitude sur une grandeur

Soit la grandeur $y = \cos x$, que l'on cherche à connaître grâce à la mesure de l'angle x. On mesure cet angle avec la valeur moyenne $\bar{x}$ et une incertitude dx. On cherche l'incertitude sur y.

Si x varie entre $\bar{x} - dx$ et $\bar{x} + dx$, y varie entre $y(\bar{x} - dx)$ et $y(\bar{x} + dx)$. L'incertitude sur y est donc $y(\bar{x} + dx) - y(\bar{x}) = dy = y^{'}(\bar{x})dx = \sin \bar{x}\, dx$.

Ainsi, $y = \bar{y} \pm dy = \cos \bar{x} \pm \sin \bar{x}\, dx$. L'incertitude relative sur y est $\frac{dy}{y} = \frac{\sin \bar{x}\, dx}{\cos \bar{x}}$=$\tan \bar{x}\, dx$.

III/ Dérivées partielles d'une fonction f(x,t) de deux variables réelles x et t.

En physique, on est amené à décrire les ondes comme des grandeurs variant dans l'espace et dans le temps. Il suffit de penser aux vagues sur la mer : si on regarde la mer à un instant donné, on voit des creux à certains endroits et des sommets de vague à d'autres endroits. Il y a donc une variation de la hauteur de la mer dans l'espace. Si de plus on regarde la hauteur de la mer en un point donné au cours du temps, on voit qu'elle varie entre les creux et les bosses des vagues. Il y a donc variation dans le temps. Il faut donc au moins deux variables pour décrire les vagues : une d'espace (ici x) et une autre étant le temps t.

La hauteur des vagues au point de coordonnée x à l'instant t est donnée par une fonction $f(x,t)$. On appelle dérivée partielle de f par rapport à x la fonction obtenue en dérivant $f(x,t)$ comme si x était la seule variable : on fait comme si t était une constante. On note cette dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$. Cette notation est commune aux mathématiciens et aux physiciens. On définit de même la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Exemple : $f(x,t) = x^2 \sin t + t + 1/x$. On a : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin t - 1/x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial t} = x^2 \cos t + 1$.